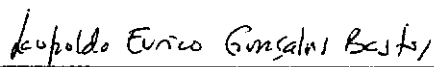


ESTOCAGEM POR ESTRATIFICAÇÃO TÉRMICA
DE LÍQUIDO EM RESERVATÓRIO

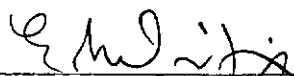
Alcides Padilha

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
(M.Sc.)

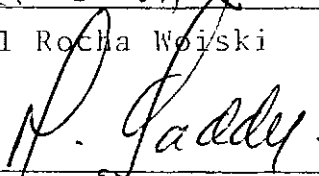
Aprovada por:



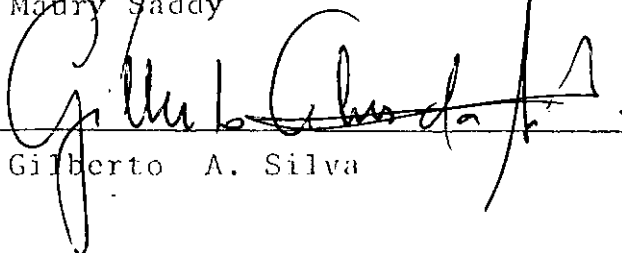
Leopoldo Eurico Gonçalves Bastos



Emanuel Rocha Woiski



Maury Saddy



Gilberto A. Silva

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
JANEIRO de 1983

PADILHA, ALCIDES

Estocagem por Estratificação Térmica de Líquido em Reservatório (Rio de Janeiro) 1982.

X , 127 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M. Sc., Engenharia Mecânica, 1982).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Fac. de Engenharia.

1. Estocagem de Energia Térmica I. COPPE-UFRJ II. Título (Série)

À memória de meu pai João Padilha e à minha mãe Luzia, exemplos de honestidade, trabalho e responsabilidade.

Ao Sr. Ismael de Marchi (em memória), ao Prof. Dr. Luiz Ferreira Martins e à Sra. Angelina Brocco Foggetti pelo amor, apoio e orientação a mim dedicados nos momentos difíceis da minha vida.

À minha esposa Maria

E a minha filha Juliana

pelo estímulo

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que colaboraram para a realização deste trabalho e, em particular:

Ao prof. Dr. Leopoldo Eurico Gonçalves Bastos, cuja seriedade e dedicada orientação guiaram-me nas muitas dificuldades do trabalho.

Ao Prof. Marco Antônio Rahal Sacoman, da Fundação Educacional de Bauru (FEB), pelas sugestões e esclarecimentos.

Ao Prof. Emanuel Rocha Woiski, pela colaboração durante a realização deste trabalho.

Ao Prof. Paulo César Primo Agostinho pelo apoio e estímulo.

À Diretoria e aos professores da UNESP - Campus de Ilha Solteira, pela atenção que me dispensaram quando solicitados.

À Srta. Dulcinéia de Oliveira Costa, pelos trabalhos de datilografia.

Ao Sr. Antonio Carlos Homem, pelos desenhos.

À CAPES, pelo Auxílio financeiro.

RESUMO

A estocagem de energia via estratificação térmica de um líquido em um tanque, é um tema atual de pesquisa e desenvolvimento, visto sua grande aplicabilidade. Considerando um balanço de energia para o sistema de estocagem é proposto um modelo semi-empírico unidimensional e transiente descrevendo a história dos perfis de temperatura do líquido e da parede do vaso durante os períodos de operação e repouso.

Os resultados teóricos são comparados com dados experimentais existentes, e estudado também a influência da relação altura/diâmetro do tanque sobre a eficiência da energia.

ABSTRACT

Storage of energy using the thermal stratification of a liquid in a tank, is a present theme of research and development, because its enormous applicability. Considering the energy conservation equations, it is proposed a transient one-dimensional semi-empirical model to the storage system, describing the temperature profile history of the liquid and the vessel wall, during the normal operating conditions (charging, discharging and static node).

The theoretical results are compared to the existing experimental data. Also, the influence of the height to diameter ratio (H/D) of the vessel on the exergy efficiency is studied.

ÍNDICE

	Pág.
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
I.1 - Processos de Estocagem	1
I.2 - Histórico	3
I.3 - Objetivos	5
CAPÍTULO II - A ESTOCAGEM POR ESTRATIFICAÇÃO	7
II.1 - Descrição	7
II.2 - Exemplos de Aplicação da estocagem por estratificação	9
CAPÍTULO III - TEORIA	14
III.1 - Hipóteses simplificadoras	14
III.2 - Modelo matemático	16
III.2.1 - Caso geral	16
III.2.2 - Método de solução	21
III.2.2.1 - Operação de carga e descarga	23
III.2.2.2 - Operação de resfriamento natural	29
III.2.2.3 - Caso particular	34
CAPÍTULO IV - EFICIÊNCIA TÉRMICA	39
IV.1 - Introdução	39

IV.2 - Energia e eficiência térmica do sistema de estocagem, a partir da Primeira Lei da Termodinâmica	40
IV.3 - Trabalho disponível e eficiência térmica do sistema de estocagem, a partir da Segunda Lei da Termodinâmica	43
CAPÍTULO V - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	47
V.1 - Introdução	47
V.2 - Operação de carga	49
V.3 - Operação de descarga	57
V.4 - Operação de resfriamento	68
CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES	73
VI.1 - Validade do modelo e dos métodos de solução utilizados	73
VI.2 - Limitações do modelo	73
VI.3 - Resultados e extensões imediatas	75
VI.4 - Resultados e extensões futuras	76
APÊNDICE A - Adimensionalização do sistema de equações (III-1) a (III-5)	77
APÊNDICE B - Método implícito de Crank-Nicolson	79
APÊNDICE C - Solução do sistema de equações algébricas lineares pelo método iterativo de Gauss-Seidel	81

APÊNDICE D - Solução do sistema de equações algé- bricas não lineares pelo método ite- rativo de Newton-Raphson	89
APÊNDICE E - Adimensionalização do sistema de equações (III-33) a (III-39)	100
APÊNDICE F - Solução do sistema de equações (III-40) a (III-43) pelo método da Transformada de Laplace	102
APÊNDICE G - Solução do sistema de equações (III-40) e (III-44) a (III-46) pelo método da Transformada de Laplace	109
APÊNDICE H - Comparação entre a eficiência térmica do fluido estratificado e o homogêneo no reservatório	114
NOMENCLATURA	121
BIBLIOGRAFIA	125

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

1.1 - Processos de Estocagem

Um dos processos clássicos de estocagem de energia sob forma de energia interna é o de manter durante um certo tempo, num tanque isolado, uma determinada massa de líquido a um nível de temperatura. Esta forma de estocagem é conhecida como estocagem térmica por calor sensível. Outro processo também utilizado é o da estocagem térmica por calor latente, onde o fluido mantém-se a uma temperatura constante enquanto cede ou absorve energia.

Os fluidos mais comumente utilizados são a água pressurizada até 300°C (80 bar), os fluidos orgânicos e os sais fundidos.

Em sistemas não convencionais de aproveitamento de energia, como aqueles utilizando energia solar, a estocagem térmica adquire especial importância. O caráter aleatório da radiação solar, as condições climáticas da região e o tipo de emprego previsto para o sistema de conversão da energia solar, ditam as características e dimensões da unidade de estocagem térmica adequada.

Foi somente a partir do final da década de 60, Koefoed¹, que a estocagem térmica passou a receber a atenção de diversos pesquisadores, em vista de sua crescente aplicabilidade, a partir dessa época, em sistemas de conservação e aproveitamento de energia.

A unidade de estocagem térmica por calor sensível, quando acoplada a um determinado sistema como, por exemplo, a uma bateria de coletores solares, operará com dois ní-

veis distintos de temperatura do fluido de trabalho. Caso haja um processo de mistura no tanque entre as porções do fluido quente (vindo dos coletores) e frio (da alimentação), a temperatura do fluido estocado terá um valor médio abaixo da temperatura do fluido quente de entrada.

Em alguns sistemas de aproveitamento de energia, este nível médio de temperatura alcançado é indesejável, por não ser suficiente para acionar uma máquina térmica, uma vez que a eficiência dada pela Segunda Lei da Termodinâmica é muito baixa, havendo pouca disponibilidade do sistema de estocagem em fornecer calor a níveis determinados de temperatura para uma realização de trabalho.

Assim, considerando a necessidade da manutenção de níveis constantes de temperatura nas fontes quente e fria e da obtenção, ao mesmo tempo, de uma grande quantidade de energia térmica armazenada, surgiu a idéia de se utilizar o processo de estocagem por estratificação. Através deste processo, num único reservatório consegue-se manter um líquido a duas temperaturas distintas, sem ocorrer mistura. O fluido quente entra no topo do tanque através de difusores, ficando aí estocado, ao passo que o fluido frio segue o caminho inverso.

Quando o líquido no interior do vaso de estocagem é pouco perturbado, devido à presença de difusores nas tomadas de entrada e saída, forma-se uma camada de fluido intermediária às regiões quente e fria, Dumond².

A identificação da espessura, e da posição com o tempo, desta camada intermediária (que apresenta um alto gradiente de temperatura), possibilita uma análise sobre a disponibilidade desse sistema de estocagem em atender a uma determina-

da demanda de energia, mantendo constantes os níveis máximo e mínimo de temperatura do fluido de trabalho.

A utilização da estocagem por termoclina é também do ponto de vista econômico, atraente, pois constituiu-se num sistema simples, acarretando baixos custos tanto em materiais, quanto em instalação e manutenção, Gross³.

Esta forma de estocagem constituiu-se num tópico bastante recente de pesquisa e desenvolvimento, pois apesar de sua grande aplicabilidade, não existe ainda definida uma metodologia de projeto. Pode-se observar, por outro lado, que grande centros de pesquisa no exterior como o Sandia National Laboratories, nos EUA, e o Laboratoire d'Energetique Solaire, na França, estão desenvolvendo estudos experimentais com protótipos de tanques de estocagem por termoclinas, bem como existem diversos autores procurando desenvolver modelos teóricos visando a simulação do comportamento da frente de estratificação e sua possível relação com a posição dos difusores. De uma maneira geral, a estocagem por termoclina é um assunto aberto, necessitando para o seu completo entendimento um grande esforço teórico-experimental.

1.2 - Histórico

Cabelli⁴ em 1977 apresentou em estudo numérico de um modelo bidimensional de escoamento com transferência de calor para a água no interior de um vaso com estratificação, para uso em aplicações solares. Foi determinada a influência da posição de dois tubos nas regiões de alimentação e descarga do tanque, o efeito do número de Reynolds e a contribuição do empuxo na estratificação. Estabeleceu ainda uma comparação do mode-

lo bidimensional com um modelo unidimensional, não encontrando uma grande discrepância entre os valores obtidos.

Lavan e Thompson⁵ realizaram estudos experimentais também com tanques de água quente. Os testes foram efetuados para altas descargas e diferentes temperaturas de entrada e saída do fluido, considerando diversas razões entre o diâmetro e a altura do tanque. Foi apresentado além disso, o estudo do efeito da configuração das tomadas de alimentação e descarga na estratificação. Foi estabelecida uma correlação empírica a partir dos dados disponíveis, resultando informações úteis para o projeto de sistemas de estocagem de água quente. Foi proposta ainda uma forma de configuração para um tanque de estocagem específico.

Na França, entre outubro de 1976 e janeiro de 1977, foram efetuados diversos testes na Central Eletrosolar de 1 MW_t, que dispõe de um sistema de estocagem térmica por estratificação. Foi observado o comportamento dos componentes da central através de uma série de medidas. A estocagem térmica por termoclinas foi alcançada com a utilização de um fluido orgânico trabalhando a altas temperaturas, CNRS⁶.

A necessidade de resultados experimentais para o conhecimento do processo de estocagem por meio de termoclinas foi enfatizada por Gross³ em 1980, quando da descrição de um programa de testes a serem realizados com um protótipo.

Em 1981, Blay⁷ apresentou um modelo teórico unidimensional, considerando as variações de temperatura de um fluido orgânico em estratificação e o perfil de temperatura da parede do tanque, quando em processo de resfriamento por convecção natural. Foi adotado um modo estático de operação (ausência

de carga e descarga). A comparação dos resultados teóricos com os dados experimentais comprovou a validade do modelo adotado.

Do histórico exposto acima, pode-se perceber a necessidade do desenvolvimento de um modelo teórico geral, que represente o processo de estratificação térmica sob as condições de carga, descarga e resfriamento natural, bem como, que seja capaz de fornecer dados sobre a capacidade da massa no interior do tanque em armazenar energia interna e disponibilidade para realização de trabalho.

1.3 - Objetivos

A finalidade deste trabalho é a formulação de um modelo matemático capaz de simular os perfis transientes de temperatura do fluido e na parede de um tanque de estocagem por estratificação durante as operações de carga, descarga, ou resfriamento natural (períodos de inatividade do sistema).

Para cada uma das situações acima, os resultados teóricos obtidos são comparados com dados experimentais disponíveis, CNRS⁶.

Deve-se observar que o modelo a ser apresentado pode descrever de uma maneira geral as situações encontradas na estocagem por estratificação, e que, por outro lado, reproduz como casos particulares não só o modelo unidimensional formulado por Cabelli⁴, que admite como constante a temperatura de parede para o tanque, mas também o de Blay⁷, no caso do resfriamento natural do fluido no tanque de estocagem.

Além disso, considerando a Primeira e a Segunda Lei da Termodinâmica, apresenta-se a análise da eficiência energética e da disponibilidade do processo com o tempo, tanto para

o fluido estratificado termicamente, quanto para o fluido homogeneizado.

CAPÍTULO II - A ESTOCAGEM POR ESTRATIFICAÇÃO

II.1 - *Descrição*

No processo de estratificação térmica, o fluido no interior do reservatório distribui-se em três regiões distintas: uma região onde o fluido é quente, fluido este proveniente do sistema de captação solar; uma região fria, alimentada pelo fluido que retorna do sistema de utilização; e uma outra região intermediária, que separa as duas precedentes e está submetida a um apreciável gradiente de temperatura. A curva que representa a história da temperatura do fluido em estratificação ao longo da altura do tanque é denominada de termoclina.

As figuras (II-1) e (II-2) apresentam, esquematicamente o tanque de estocagem e o seu posicionamento num sistema genérico de utilização da energia solar. Ao tanque de estocagem associam-se dois circuitos independentes como pode ser visto pela figura (II.2): o circuito primário, que compreende o sistema de captação e conversão da energia solar em energia térmica através do aquecimento de um fluido de trabalho que se deslocará para a região superior do tanque de estocagem ou acumulador, e o circuito secundário, que constitui-se no sistema que irá utilizar este fluido aquecido, resfriando-o e injetando-o na região inferior do acumulador.

Conforme citado anteriormente, podem ser definidas três situações para o fluido no tanque de estocagem e que serão analisadas neste trabalho: carga, descarga e resfriamento natural. A primeira corresponde ao enchimento do tanque pelo fluido quente, enquanto que a descarga corresponde a uma maior entrada de fluido frio, com a consequente retração da frente

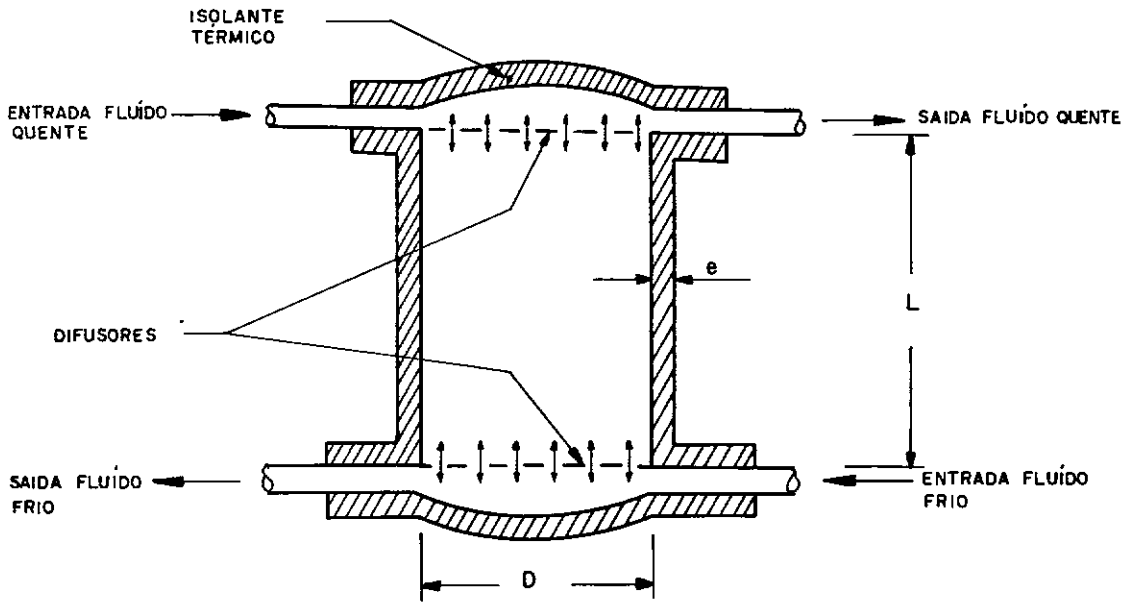


Figura II.1 - Esquema do tanque de estocagem.

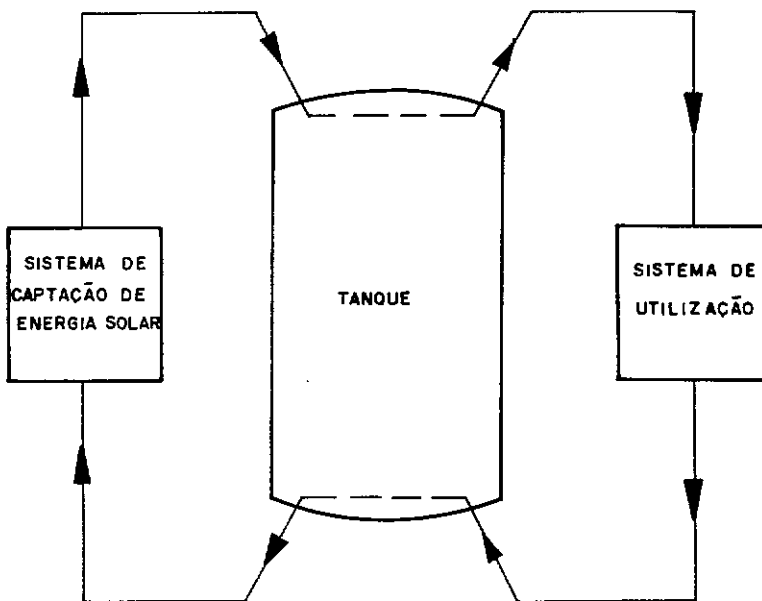


Figura II.2 - Sistema captação-utilização de energia solar com estocagem térmica.

quente. Já o resfriamento natural corresponderá à situação em que as duas frentes estão estacionárias, sendo que as perdas de energia através das paredes do vaso para o ambiente, que ocorrem também nos outros dois casos, adquirem aí, um papel mais importante.

II.2 - Exemplos de Aplicação da Estocagem por Estratificação

Apesar de existirem poucos artigos sobre o assunto, pode-se mostrar sua atualidade pela existência de um grande número de aplicações tecnológicas recentes. Notadamente na área de energia podem ser identificados vários sistemas de conversão heliotérmica onde a estocagem por calor sensível utiliza a estratificação térmica do fluido de trabalho. Como exemplos, descrever-se-á em seguida, sucintamente, algumas aplicações comerciais que utilizam esta forma de estocagem.

Na figura (II-3), é mostrado o diagrama esquemático do programa francês denominado THEK, que compreende a realização de unidades de produção de energia de média potência da ordem 100 KW_e , pela conversão heliotérmica da energia solar. Por intermédio de uma bateria de concentradores parabólicos a energia solar é concentrada e absorvida por um fluido de trabalho que circula em cada absorvedor por meio de uma tubulação comum, conectada a um sistema de regulação e de estocagem. A energia térmica disponível poderá ser utilizada de forma direta ou indireta. Diretamente, para aquecimento, refrigeração, produção de vapor, transformações industriais, agrícolas e outras aplicações correlatas, e indiretamente para produção de energia elétrica. Uma das fases deste projeto compreende a realização de testes com o reservatório de estocagem, utilizando óleo giloterm

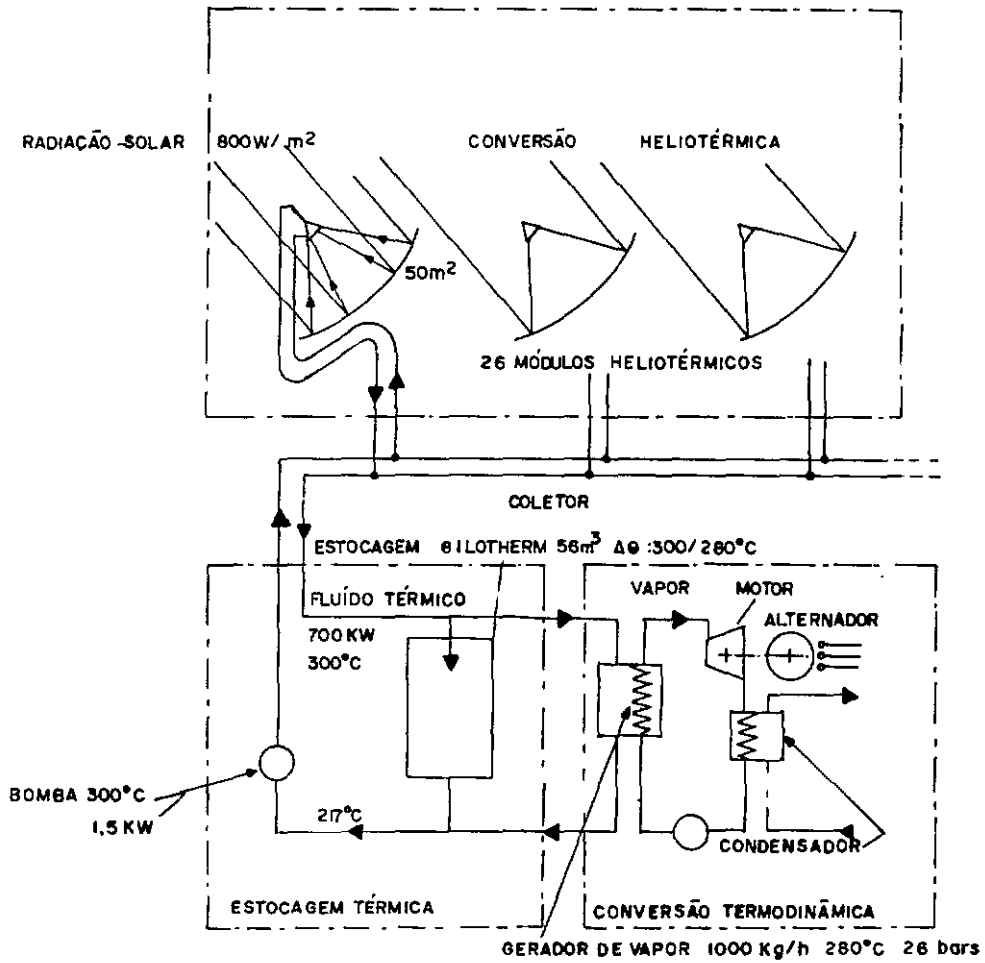


Figura II-3 - Módulos de conversão heliotérmica, sistema de estocagem térmica e sistema de conversão termodinâmica.

entre 280°C e 320°C. Este tanque destina-se tanto à regulação do funcionamento do conversor, quanto à manutenção de um determinado nível de energia térmica disponível.

A empresa italiana Ansaldo, está desenvolvendo uma planta solar de potência de 35 KW_e, usando coletores solares cilíndrico-parabólicos. No esquema mostrado na figura (II.4), pode ser visto que é utilizado um tanque de estocagem operando por estratificação térmica.

A figura (II-5) mostra o esquema de um circuito utilizado em sistemas de aproveitamento de energia solar pela firma francesa TOTAL. Observa-se a importância dada ao reservatório de estocagem de água quente. Nele são delimitadas duas regiões, quente e fria, por um diafragma deslizante numa haste vertical que está engastada no topo do reservatório. A aplicação tecnológica deste dispositivo é muito recente, uma vez que a influência dos difusores e do diafragma está ainda sendo objeto de pesquisa, SANDIA, GROSS³.

Com a finalidade de obter subsídios para o projeto francês de uma central solar a alta concentração via conversão termodinâmica na faixa 1MW_t, foram realizados, em 1977, em FONT ROMEU uma série de testes com uma central eletrosolar piloto. Os resultados destes testes, assim como uma análise geral do sistema utilizado de conversão e estocagem de fluido térmico, usando o processo de estratificação, podem ser encontrados em (6).

Procurou-se através dos exemplos, mostrar a importância desta forma de estocagem por calor sensível ficando evidenciado, a necessidade de se obter um melhor entendimento sobre o processo de formação das termoclínas. Este é precisamente o objeto do estudo que se segue.

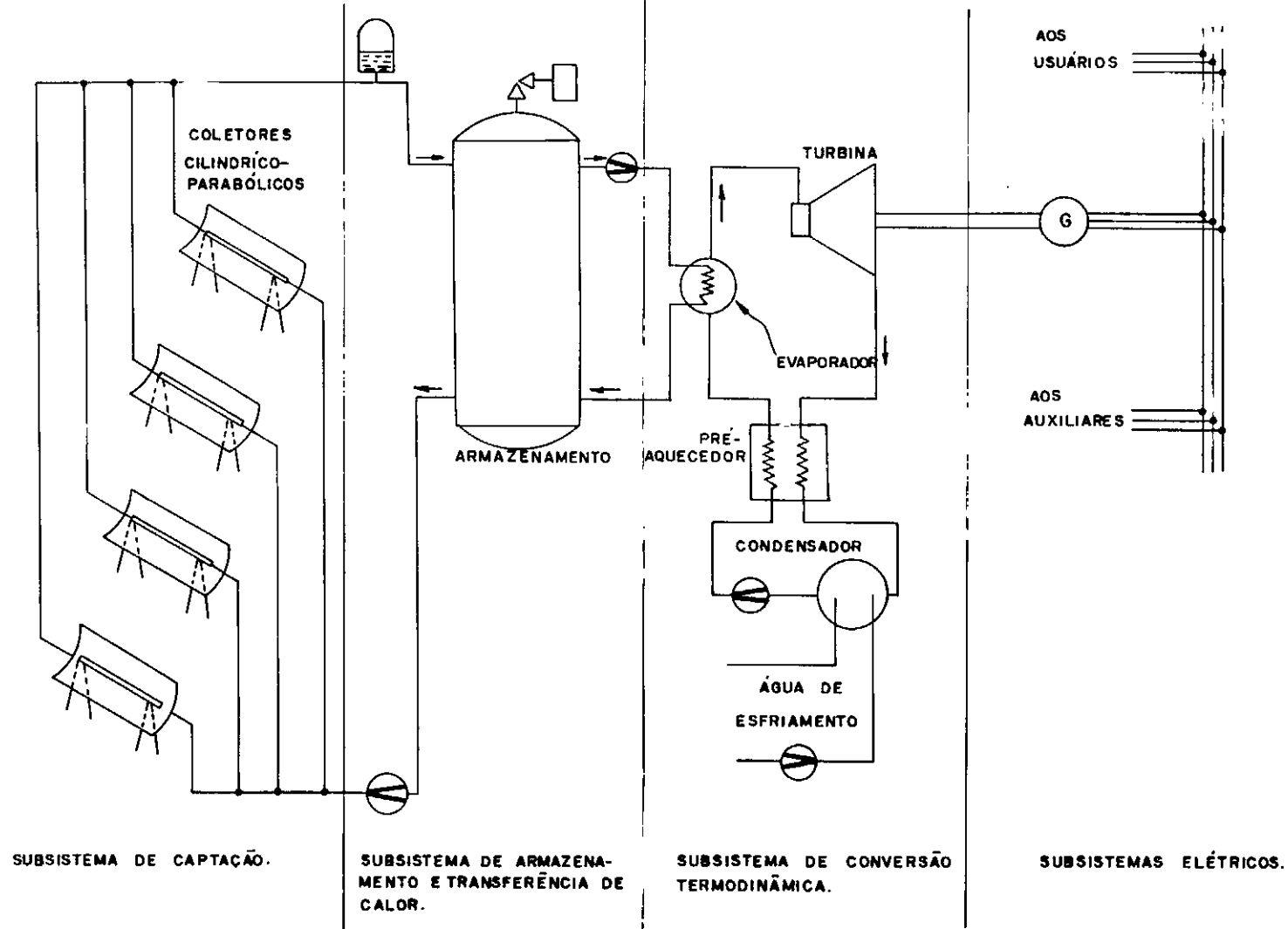


Figura II-4 - Planta solar de coletores cilindro-parabólicos de potência de 35 KW.

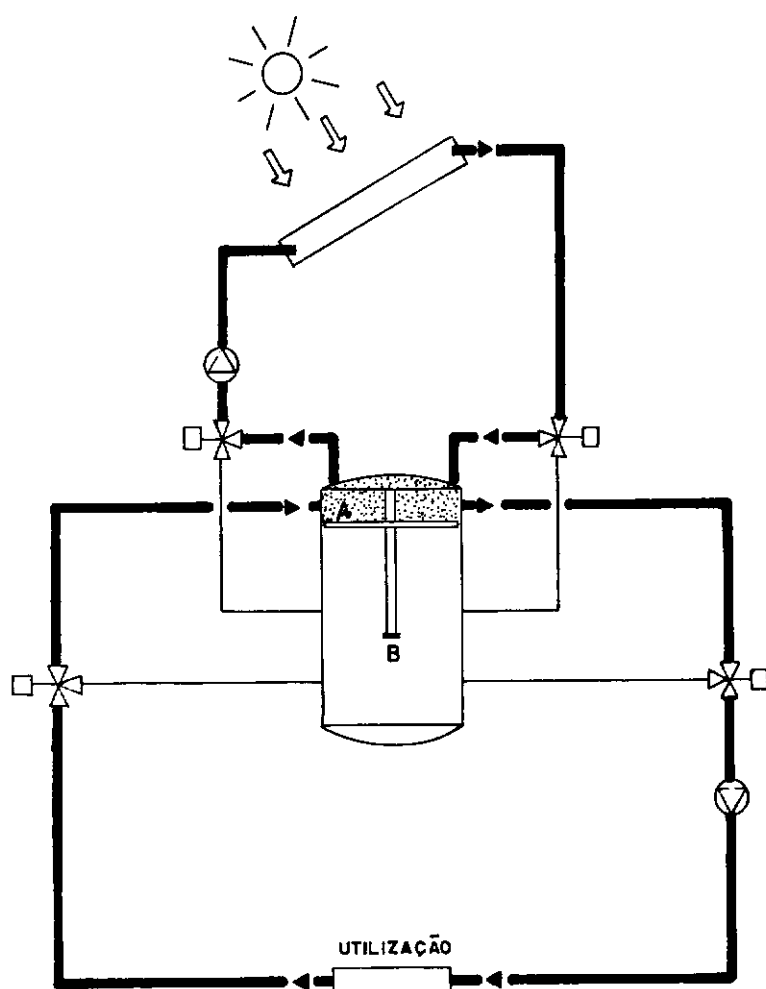


Figura II- 5 - Sistema de aquecimento com fonte de calor descontinua e estocagem de água quente a alto nível de temperatura.

CAPÍTULO III - TEORIA

III.1 - Hipóteses Simplificadoras

As seguintes hipóteses serão consideradas na análise teórica do processo de estocagem térmica de líquidos por estratificação, ver figura (III-1), durante as operações de carga, descarga e resfriamento natural:

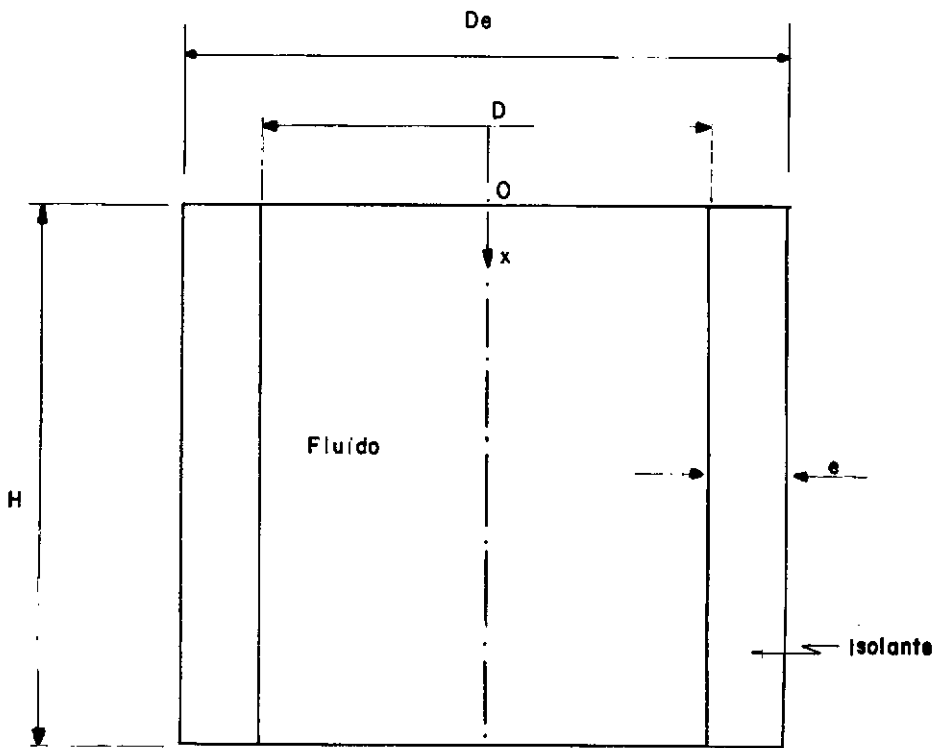


Figura (III-1)- Geometria do Problema.

- (1) Nas operações de carga e descarga do fluido, este considerado incompressível, o processo de transferência de calor será por convecção forçada no interior do tanque, supondo-se o escoamento laminar unidimensional, tendo uma velocidade constante.
- (2) As propriedades físicas do fluido, e do material do isolante da parede serão consideradas constantes, e seus valores

numéricos determinados para uma temperatura média (semi-soma dos valores máximo e mínimo das temperaturas do fluido). A resistência térmica da parede metálica supor-se-á desprezível em comparação com o material isolante.

- (3) Para o fluido, o calor específico apresenta um valor grande de modo que a temperatura do fluido não seja influenciada pelo atrito e portanto, pela dissipação viscosa.
- (4) No caso em que há somente resfriamento natural do tanque considerar-se-á que, internamente no mesmo, há convecção natural, sendo esta caracterizada por um alto número de Grashof e de Prandtl.
- (5) Serão considerados para este sistema de estocagem quando em operação, a ocorrência de três regiões distintas: uma região de camada limite no líquido em contato com a parede interna do tanque, uma segunda região ainda no fluido, onde o campo de temperaturas é unidimensional e transiente (a velocidade do fluido é pequena) e finalmente a região da parede do tanque, considerada como sendo o isolante que apresenta também um campo de temperatura unidimensional.
- (6) Durante as operações de carga, descarga e resfriamento natural o topo e o fundo do tanque de estocagem serão considerados totalmente isolados do ambiente.

III.2 - Modelo Matemático

III.2.1.- Caso Geral

Serão agora determinados os perfis de temperatura para o fluido e para a parede do reservatório, quando o sistema de estocagem estiver submetido às operações de carga, descarga e regime estático (só resfriamento natural).

Considerando as hipóteses formuladas e a geometria do problema, resultarão para dois elementos diferenciais um no meio fluido e o outro na parede, as seguintes equações resultantes do balanço de energia e que descrevem os campos de temperatura correspondentes: no seio do fluido $T(x,t)$ e axialmente na parede $T'(x,t)$:

Fluido

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - Q(x,t) ,$$

$$0 \leq x \leq H , \quad t > 0 \quad \text{III-1}$$

Parede

$$\rho' C'_p \frac{\partial T'}{\partial t} = K' \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + Q'(x,t) - Q_o(x,t) ,$$

$$0 \leq x \leq H , \quad t > 0 \quad \text{III-2}$$

onde:

C_p , C'_p : Calor específico do fluido e do isolante, a pressão constante, respectivamente.

D , D_e : Diâmetro interno e externo do reservatório, respectivamente.

h , h_∞ : Coeficiente de transferência de calor entre a parede e o fluido no interior do reservatório, e entre a parede e o meio ambiente respectivamente.

H : Altura do reservatório.

K , K' : Condutividade térmica do fluido e do isolante, respectivamente.

$Q(x,t) = 4 \frac{h}{D} (T-T')$: Taxa de calor transferido à parede, por unidade de volume do fluido.

$Q'(x,t) = \frac{4 D h}{D_e^2 - D^2} (T-T')$: Taxa de calor absorvido do fluido, por unidade de volume do isolante.

$Q_o(x,t) = \frac{4 (T'-T_\infty)}{(D_e^2 - D^2) \left(\frac{\ln(D_e/D)}{2 K'} + \frac{1}{D_e h_\infty} \right)}$: Taxa de calor perdida para o meio ambiente, por unidade de volume do isolante.

T_∞ : Temperatura do meio ambiente.

u : Velocidade do fluido no interior do reservatório para operações de carga ($u > 0$), descarga ($u < 0$) e resfriamento natural ($u = 0$).

ρ , ρ' : Massa específica do fluido e do material isolante, respectivamente considerando as operações indicadas, para o sistema de estocagem, as condições de contorno e iniciais serão as seguintes:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial T'(x,t)}{\partial x} = 0 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad t > 0 \quad \text{III-3}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial T'(x,t)}{\partial x} = 0 \quad , \quad x = H \quad , \quad t > 0 \quad \text{III-4}$$

$$T(x,0) = T'(x,0) = T_0(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq H \quad \text{III-5}$$

onde:

$T_0(x)$: perfil de temperatura inicial.

O sistema de equações (III-1) a (III-5), é a seguir adimensionalizado (ver Apêndice A), usando as variáveis adimensionais.

$$\tau = \frac{\alpha t}{H^2} \quad , \quad X = \frac{x}{H} \quad , \quad U = \frac{H}{\alpha} u$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T_0} \quad , \quad \theta' = \frac{T' - T_\infty}{\Delta T_0}$$

Sendo:

$\Delta T_0 = T(0,0) - T(H,0)$: diferença inicial das temperaturas do fluido no topo e no fundo do reservatório.

$\alpha = K/(\rho C_p)$: difusividade térmica do fluido.

Obtem-se então:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - U \frac{\partial \theta}{\partial X} - 4B \text{Nu} (\theta - \theta') ,$$

$$0 \leq X \leq 1 , \quad \tau > 0 \quad \text{III-6}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \tau} = \frac{\xi}{W} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial X^2} + \xi C \text{Nu} (\theta - \theta') - F \xi \text{Nu}_{eq} \theta' ,$$

$$0 \leq X \leq 1 , \quad \tau > 0 \quad \text{III-7}$$

As condições de contorno e inicial se tornam:

$$\frac{\partial \theta (X, \tau)}{\partial X} = \frac{\partial \theta' (X, \tau)}{\partial X} = 0 , \quad X = 0 , \quad \tau > 0 \quad \text{III-8}$$

$$\frac{\partial \theta (X, \tau)}{\partial X} = \frac{\partial \theta' (X, \tau)}{\partial X} , \quad X = 1 , \quad \tau > 0 \quad \text{III-9}$$

$$\theta (X, 0) = \theta' (X, 0) = \theta_o (X, 0) , \quad 0 \leq X \leq 1 \quad \text{III-10}$$

onde:

$$B = H/D$$

$$C = 4 D H / (D_e^2 - D^2)$$

$$F = 8 H$$

$$K_{eq} = K' / (D_e^2 - D^2)$$

$Nu = hH/k$: Número de Nusselt, devido a convecção interna.

$Nu_{eq} = K_{eq} H / (K(\ln(D_e/D) + 2K'/(D_e h_\infty)))$: Número de Nusselt e quivalente.

$$W = K/K'$$

$$\xi = \rho C_p / (\rho' C'_p)$$

Como o modelo teórico tem uma natureza semi-empírica, o número de Nusselt (Nu) deverá ser representado por diferentes correlações para cada situação (convecção livre ou forçada internamente no tanque de estocagem). No caso de carga ou descarga, o Nu será definido pela seguinte correlação, dada por Jones et al⁹:

$$Nu = 0,023 Re^{0,5} Pr^{0,4} \quad \text{III-11}$$

onde:

$Pr = \nu/\alpha$: Número de Prandtl.

$Re = \rho u H/\mu$: Número de Reynolds.

$\nu = \mu/\rho$: Viscosidade cinemática do fluido.

μ = Viscosidade dinâmica do fluido.

Durante o período de regime estático (i. é resfriamento natural do fluido em repouso), Nu será aquele fornecido por Kreith¹⁰:

$$Nu = 0,13 (Gr Pr)^{1/3} \quad \text{III-12}$$

sendo o número de Grashof no caso de líquidos, Schlichting¹¹, dado por:

$$Gr = g H^3 \beta (T - T') / \nu^2$$

usando os parâmetros adimensionais já definidos:

$$Nu = 0,13 (Gr_0 Pr (\theta - \theta'))^{1/3} \quad \text{III-13}$$

onde:

$$Gr_0 = g \beta H^3 \Delta T_0 / \nu^2$$

Considerando o processo de resfriamento da parede externa do reservatório para o meio ambiente, como sendo de convecção natural, o coeficiente de transferência de calor entre a parede e o ambiente Welty¹⁶, será:

$$h = 0,119 (Gr Pr)^{2/5} \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ C} ; Gr Pr > 10^9 \quad \text{III-14}$$

III.2.2 - Método de Solução

Para a solução do modelo geral, será aplicado o método implícito de Crank-Nicolson (Apêndice B), para discretização do sistema de equações (III-6) a (III-10).

Este método utiliza um centro de simetria para as equações (III-6) a (III-10), sob a forma de diferenças finitas, apresentando um erro de truncamento de elevada ordem.

Os pontos estarão distribuídos no fluido e

na parede interna do reservatório, como indicado na figura (III-2).

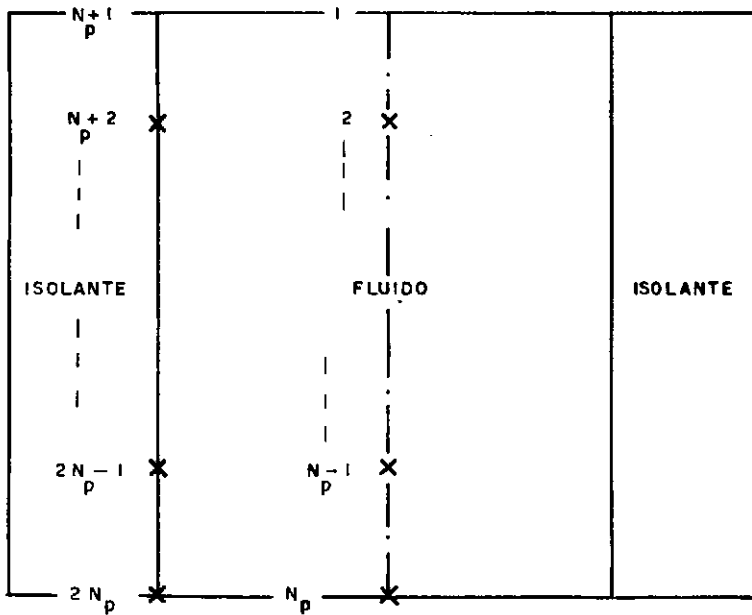


Figura III - 2 DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS NO RESERVATÓRIO

A discretização das equações do modelo geral, será feita segundo a geometria da rede finita da figura (III-3).

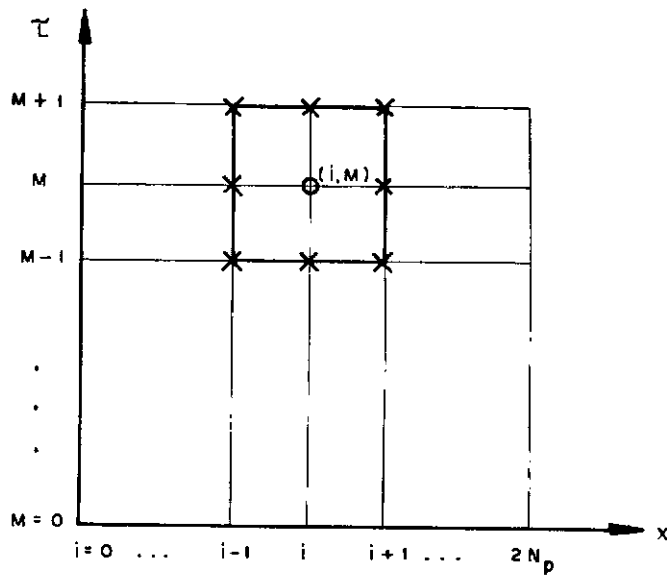


Figura III - 3 PONTOS DA REDE FINITA

onde:

Fluido $1 \leq i \leq N_p$; Topo : $i = 1$

Fundo : $i = N_p$

Pontos internos : $2 \leq i \leq N_p - 1$

Parede $N_p + 1 \leq i \leq 2 N_p$; Topo : $i = N_p + 1$

Fundo : $i = 2 N_p$

Pontos internos : $N_p + 2 \leq i \leq 2 N_p - 1$

$i = 1, 2, 3, \dots, 2 N_p$: Número de pontos no reservatório.

$M = 0, 1, 2, \dots, M_t$: Número do intervalo de tempo discreto considerado.

$\Delta X = X_{i+1} - X_i$: Distância entre os pontos do fluido e da parede.

$\Delta \tau = \tau_{M+1} - \tau_M$: Intervalo entre dois instantes de tempo consecutivos.

III.2.2.1 - Operação de Carga e Descarga

$$\text{Fluido} : \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - U \frac{\partial \theta}{\partial X} - 4 B Nu (\theta - \theta')$$

$$\text{Parede} : \frac{\partial \theta'}{\partial \tau} = \frac{\xi}{W} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial X^2} + \xi C Nu (\theta - \theta') - F \xi Nu_{eq} \theta'$$

Discretizando por diferenças finitas :

Fluido

$$\begin{aligned}
\frac{\theta_{i,M+1} - \theta_{i,M}}{\Delta \tau} = & \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_{i-1,M+1} - 2\theta_{i,M+1} + \theta_{i+1,M+1}}{\Delta X^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\theta_{i-1,M} - 2\theta_{i,M} + \theta_{i+1,M}}{\Delta X^2} \right) - \\
& - \frac{U}{2} \left(\frac{\theta_{i+1,M+1} - \theta_{i-1,M+1}}{2 \Delta X} + \frac{\theta_{i+1,M} - \theta_{i-1,M}}{2 \Delta X} \right) - \\
& - \frac{4 B Nu}{2} \left(\theta_{i,M+1} + \theta_{i,M} - \theta'_{i+N_p,M+1} - \theta'_{i+N_p,M} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \theta_{i,M+1} \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \frac{1}{\Delta X^2} + 2 B Nu \right) + \theta_{i,M} \left(- \frac{1}{\Delta \tau} + 2 B Nu + \frac{1}{\Delta X^2} \right) + \\
& + \theta_{i-1,M+1} \left(- \frac{1}{2 \Delta X^2} - \frac{U}{4 \Delta X} \right) + \theta_{i+1,M+1} \left(- \frac{1}{2 \Delta X^2} + \frac{U}{4 \Delta X} \right) + \\
& + \theta_{i-1,M} \left(- \frac{1}{2 \Delta X^2} - \frac{U}{4 \Delta X} \right) + \theta_{i+1,M} \left(- \frac{1}{2 \Delta X^2} + \frac{U}{4 \Delta X} \right) - \\
& - \theta'_{i+N_p,M+1} \left(2 B Nu \right) - \theta'_{i+N_p,M} \left(2 B Nu \right) = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

$$2 \leq i \leq N_p - 1 \quad , \quad M > 0 \quad \text{III-15}$$

Parede

$$\begin{aligned}
\frac{\theta'_{i,M+1} - \theta'_{i,M}}{\Delta \tau} = & \frac{\xi}{W} \frac{1}{2} \left(\frac{\theta'_{i-1,M+1} - 2\theta'_{i,M+1} + \theta'_{i+1,M+1}}{\Delta X^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\theta'_{i-1,M} - 2\theta'_{i,M} + \theta'_{i+1,M}}{\Delta X^2} \right) + \\
& + \xi C Nu \frac{1}{2} \left(\theta_{i-N_p,M+1} + \theta_{i-N_p,M} - \theta'_{i,M+1} - \right. \\
& \left. - \theta'_{i,M} \right) - \frac{F\xi}{2} Nu_{eq} \left(\theta'_{i,M+1} + \theta'_{i,M} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta'_{i,M+1} \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \frac{\xi}{W} \frac{1}{\Delta X^2} + \xi C Nu \frac{1}{2} + \frac{F\xi}{2} Nu_{eq} \right) + \\
+ \theta'_{i,M} \left(-\frac{1}{\Delta \tau} + \frac{\xi}{W} \frac{1}{\Delta X^2} + \xi C Nu \frac{1}{2} + \frac{F\xi}{2} Nu_{eq} \right) + \\
+ \theta'_{i-1,M+1} \left(-\frac{\xi}{2W} \frac{1}{\Delta X^2} \right) + \theta'_{i+1,M+1} \left(-\frac{\xi}{2W} \frac{1}{\Delta X^2} \right) + \\
+ \theta'_{i-1,M} \left(-\frac{\xi}{2W} \frac{1}{\Delta X^2} \right) + \theta'_{i+1,M} \left(-\frac{\xi}{2W} \frac{1}{\Delta X^2} \right) + \\
+ \left(\theta_{i-N_p,M+1} + \theta_{i-N_p,M} \right) \left(-\xi C Nu \frac{1}{2} \right) = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

$$N_p + 2 \leq i \leq 2 N_p - 1 \quad , \quad M > 0 \quad \text{III-16}$$

Pontos extremos : Condições de contorno

Estas temperaturas não são conhecidas, então usa-se a expansão em Série de Taylor :

Fluido : $i = 1$ e $i = N_p$

$$\begin{aligned} \text{Topo : } \theta_{i+1} = \theta_i \Big|_{i=1} + \frac{\partial \theta}{\partial X} \Delta X \Big|_{i=1} + \left(\frac{\Delta X}{2!} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \Big|_{i=1} + \\ + \Theta (\Delta X)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fundo : } \theta_{i-1} = \theta_i \Big|_{i=N_p} - \frac{\partial \theta}{\partial X} \Delta X \Big|_{i=N_p} + \left(\frac{\Delta X}{2!} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \Big|_{i=N_p} + \\ + \Theta (\Delta X)^3 \end{aligned}$$

Parede : $i = N_p + 1$ e $i = 2 N_p$

$$\begin{aligned} \text{Topo : } \theta'_{i+N_p+1} = \theta'_{N_p+i} \Big|_{i=N_p+1} + \frac{\partial \theta'}{\partial X} \Delta X \Big|_{i=N_p+1} + \\ + \left(\frac{\Delta X}{2!} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta'}{\partial X^2} \Big|_{i=N_p+1} + \Theta (\Delta X)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fundo : } \theta'_{i+N_p-1} = \theta'_{i+N_p} \Big|_{i=N_p} + \frac{\partial \theta'}{\partial X} \Delta X \Big|_{i=N_p} + \\ + \left(\frac{\Delta X}{2!} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta'}{\partial X^2} \Big|_{i=N_p} + \Theta (\Delta X)^3 \end{aligned}$$

Utilizando as condições de contorno do problema :

Fluido :

$$\text{Topo : } \left. \theta_{i+1} - \theta_i \right|_{i=1} = \left(\frac{\Delta X}{2} \right)^2 \left. \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial X^2} \right|_{i=1} \quad \text{III-17}$$

$$\text{Fundo : } \left. \theta_{i-1} - \theta_i \right|_{i=Np} = \left(\frac{\Delta X}{2} \right)^2 \left. \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial X^2} \right|_{i=Np} \quad \text{III-18}$$

Parede :

$$\text{Topo : } \left. \theta'_{i+Np+1} - \theta'_{Np+i} \right|_{i=1} = \left(\frac{\Delta X}{2} \right)^2 \left. \frac{\partial^2 \theta'_{Np+1}}{\partial X^2} \right|_{i=1} \quad \text{III-19}$$

$$\text{Fundo : } \left. \theta'_{i+Np-1} - \theta'_{i+Np} \right|_{i=Np} = \left(\frac{\Delta X}{2} \right)^2 \left. \frac{\partial^2 \theta'_{i+Np}}{\partial X^2} \right|_{i=Np} \quad \text{III-20}$$

Para o cálculo das derivadas segundas que aparecem nas equações (III-17) a (III-20) são usadas as equações (III-6) e (III-7) definidas agora para os pontos do contorno e discretizadas convenientemente.

Fluido :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - 4 \text{ B Nu } (\theta - \theta')$$

Topo do tanque : $i = 1$

$$\frac{\theta_{i,M+1} - \theta_{i,M}}{\Delta\tau} = \frac{2}{\Delta X^2} (\theta_{i+1,M} - \theta_{i,M}) - 2 B Nu (\theta_{i,M+1} + \theta_{i,M} - \theta'_{i+Np,M+1} - \theta'_{i+Np,M}) \quad \text{III-21}$$

Fundo do tanque : $i = Np$

$$\frac{\theta_{i,M+1} - \theta_{i,M}}{\Delta\tau} = \frac{2}{\Delta X^2} (\theta_{i-1,M} - \theta_{i,M}) - 2 B Nu (\theta_{i,M+1} + \theta_{i,M} - \theta'_{i+Np,M+1} - \theta'_{i+Np,M}) \quad \text{III-22}$$

Parede :

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \tau} = \frac{\xi}{W} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial X^2} + \xi C Nu (\theta - \theta') - F \xi Nu_{eq} \theta'$$

Topo do tanque : $i = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\theta'_{i+Np,M+1} - \theta'_{i+Np,M}}{\Delta\tau} &= \frac{\xi}{W} \frac{2}{\Delta X^2} (\theta'_{i+Np+1,M} - \theta'_{i+Np,M}) + \\ &+ \xi C Nu \frac{1}{2} (\theta_{i,M+1} + \theta_{i,M} - \theta'_{i+Np,M+1} - \\ &- \theta'_{i+Np,M}) - F \xi Nu_{eq} \frac{1}{2} (\theta'_{i+Np,M+1} + \\ &+ \theta'_{i+Np,M}) \end{aligned} \quad \text{III-23}$$

Fundo do tanque : $i = N_p$

$$\begin{aligned} \frac{\theta'_{i+N_p, M+1} - \theta'_{i+N_p, M}}{\Delta \tau} = & \frac{\xi}{W} \frac{2}{\Delta X^2} (\theta'_{i+N_p-1, M} - \theta'_{i+N_p, M}) + \\ & + \xi C Nu \frac{1}{2} (\theta_{i, M+1} + \theta_{i, M} - \theta'_{i+N_p, M+1} - \\ & - \theta'_{i+N_p, M}) + F \xi Nu_{eq} \frac{1}{2} (\theta'_{i+N_p, M+1} + \\ & + \theta'_{i+N_p, M}) \end{aligned} \quad \text{III-24}$$

O sistema de equações algébricas lineares, constituído pelas equações (III-15), (III-16) e (III-21) a (III-24), será resolvido pelo método iterativo de Gauss-Seidel, Carnahan⁸ (Apêndice C).

III.2.2.2 - Operação de Resfriamento Natural

Com a substituição da equação (III-13) nas equações (III-6) e (III-7), e considerando-se a velocidade do fluido no interior do tanque como sendo nula, obtem-se o sistema:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - \sigma_1 (\theta - \theta')^{4/3}, \quad 0 \leq X \leq 1, \quad \tau > 0 \quad \text{III-25}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \tau} = \frac{\xi}{W} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial X^2} + \sigma_2 (\theta - \theta')^{4/3} - \xi F Nu_{eq} \theta',$$

$$0 \leq X \leq 1, \quad \tau > 0 \quad \text{III-26}$$

onde:

$$\sigma_1 = 0,52 B (Gr_o Pr)^{1/3}$$

$$\sigma_2 = 0,13 \xi C (Gr Pr)^{1/3}$$

As equações (III-25) e (III-26) são discretizadas para os pontos internos do reservatório, a seguir :

Fluido

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{i,M+1} - \theta_{i,M}}{\Delta\tau} = & \frac{\theta_{i-1,M+1} - 2\theta_{i,M+1} + \theta_{i+1,M+1}}{2\Delta X^2} + \\ & + \frac{\theta_{i-1,M} - 2\theta_{i,M} + \theta_{i+1,M}}{2\Delta X^2} - \sigma_1 \left(\frac{\theta_{i,M+1} + \theta_{i,M}}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{\theta'_{i+Np,M+1} + \theta'_{i+Np,M}}{2} \right)^{4/3}, \end{aligned}$$

$$2 \leq i \leq Np - 1, \quad M > 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta\tau} + \frac{1}{\Delta X^2} \right) \theta_{i,M+1} + \left(-\frac{1}{\Delta\tau} + \frac{1}{\Delta X^2} \right) \theta_{i,M} - \frac{1}{2\Delta X^2} \theta_{i-1,M+1} - \\ - \frac{1}{2\Delta X^2} \theta_{i+1,M+1} + \frac{1}{2\Delta X^2} \theta_{i-1,M} - \frac{1}{2\Delta X^2} \theta_{i+1,M} + \\ + \sigma_1 \left(\frac{\theta_{i,M+1} + \theta_{i,M}}{2} - \frac{\theta'_{i+Np,M+1} + \theta'_{i+Np,M}}{2} \right)^{4/3} = 0 \end{aligned}$$

$$2 \leq i \leq Np - 1, \quad M > 0 \quad \text{III-27}$$

Parede

$$\begin{aligned}
\frac{\theta'_{i,M+1} - \theta'_{i,M}}{\Delta\tau} = & \frac{\xi}{W} \left(\frac{\theta'_{i-1,M+1} - 2\theta'_{i,M+1} + \theta'_{i+1,M+1}}{2\Delta X^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\theta'_{i-1,M} - 2\theta'_{i,M} + \theta'_{i+1,M}}{2\Delta X^2} \right) + \\
& + \sigma_2 \left(\frac{\theta_{i-Np,M+1} + \theta_{i-Np,M}}{2} - \frac{\theta'_{i,M+1} + \theta'_{i,M}}{2} \right)^{4/3} - \\
& - \frac{\xi F Nu_{eq}}{2} (\theta'_{i,M+1} + \theta'_{i,M}) ,
\end{aligned}$$

$$Np + 2 \leq i \leq 2 Np - 1 , \quad M > 0$$

$$\left(\frac{1}{\Delta\tau} + \frac{\xi}{W\Delta X^2} + \frac{\xi F Nu_{eq}}{2} \right) \theta'_{i,M+1} + \left(-\frac{1}{\Delta\tau} + \frac{\xi}{W\Delta X^2} + \right.$$

$$\left. \frac{\xi F Nu_{eq}}{2} \right) \theta'_{i,M} - \frac{\xi}{2W\Delta X^2} (\theta'_{i-1,M+1} + \theta'_{i+1,M+1} + \theta'_{i-1,M} +$$

$$+ \theta'_{i+1,M}) - \sigma_2 \left(\frac{\theta_{i-Np,M+1} + \theta_{i-Np,M}}{2} - \frac{\theta'_{i,M+1} + \theta'_{i,M}}{2} \right)^{4/3} = 0 ,$$

$$Np + 2 \leq i \leq 2 Np - 1 , \quad M > 0 \quad \text{III-28}$$

Para o cálculo das derivadas segundas que aparecem nas equações (III-17) a (III-20) são usadas as equações (III-25) e (III-26) definidas agora para os pontos do contorno e discretizadas convenientemente.

Fluido

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - \sigma_1 (\theta - \theta')^{4/3}$$

Topo do tanque : $i = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{i,M+1} - \theta_{i,M}}{\Delta \tau} = \frac{2}{\Delta X^2} (\theta_{i+1,M} - \theta_{i,M}) - \sigma_1 \left(\frac{\theta_{i,M+1} + \theta_{i,M}}{2} - \right. \\ \left. - \frac{\theta'_{i+Np,M+1} + \theta'_{i+Np,M}}{2} \right)^{4/3} \end{aligned} \quad \text{III-29}$$

Fundo do tanque : $i = Np$

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{i,M+1} - \theta_{i,M}}{\Delta \tau} = \frac{2}{\Delta X^2} (\theta_{i-1,M} - \theta_{i,M}) - \sigma_1 \left(\frac{\theta_{i,M+1} + \theta_{i,M}}{2} - \right. \\ \left. - \frac{\theta'_{i+Np,M+1} + \theta'_{i+Np,M}}{2} \right)^{4/3} \end{aligned} \quad \text{III-30}$$

Parede :

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \tau} = \frac{\xi}{W} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial X^2} + \sigma_2 (\theta - \theta')^{4/3} - \xi F Nu_{eq} \theta'$$

Topo do tanque : $i = 1$

$$\frac{\theta'_{i+Np,M+1} - \theta'_{i+Np,M}}{\Delta \tau} = \frac{\xi}{W} \frac{2}{\Delta X^2} (\theta'_{i+Np+1,M} - \theta'_{i+Np,M}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma_2 \left(\frac{\theta_{i,M+1} + \theta_{i,M}}{2} - \frac{\theta'_{i+Np,M+1} + \theta'_{i+Np,M}}{2} \right)^{4/3} - \\
& - \frac{\xi F Nu_{eq}}{2} \left(\theta'_{i+Np,M+1} + \theta'_{i+Np,M} \right)
\end{aligned}
\tag{III-31}$$

Fundo do tanque : $i = Np$

$$\begin{aligned}
\frac{\theta'_{i+Np,M+1} - \theta'_{i+Np,M}}{\Delta \tau} &= \frac{\xi}{W} \frac{2}{\Delta X^2} \left(\theta'_{i+Np-1,M} - \theta'_{i+Np,M} \right) + \\
& + \sigma_2 \left(\frac{\theta_{i,M+1} + \theta_{i,M}}{2} - \frac{\theta'_{i+Np,M+1} + \theta'_{i+Np,M}}{2} \right)^{4/3} - \\
& - \frac{\xi F Nu_{eq}}{2} \left(\theta'_{i+Np,M+1} + \theta'_{i+Np,M} \right)
\end{aligned}
\tag{III-32}$$

As equações (III-27) a (III-32), constituem um sistema de equações algébricas não lineares e será resolvido pelo método iterativo de Newton-Raphson, Carnahan⁸ (Apêndice D).

A operação de resfriamento natural, foi também estudada teórica e experimentalmente por Blay⁷, para um tanque, contendo 1 m³ de fluido orgânico trabalhando a temperaturas entre 50°C e 220°C.

III.2.2.3 - *Caso Particular* : a temperatura da parede do reservatório é considerada constante nas operações de carga e descarga.

Nesta situação considerando um modelo unidimensional e o referencial posicionado no fundo do tanque a temperatura do fluido será determinada a partir da equação :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho C_p u \frac{\partial T}{\partial x} - Q(x, t) ,$$

$$0 \leq x \leq H , \quad t > 0 \quad \text{III-33}$$

Como condições de contorno e inicial, será considerada uma variação degrau para a distribuição inicial de temperatura nas operações de carga e descarga.

Carga :

$$T(x, t) = T_{\max} , \quad x = x_0 , \quad t > 0 \quad \text{III-34}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} T(x, t) = T_{\min} , \quad t > 0 \quad \text{III-35}^*$$

$$T(x, 0) = T_{\min} , \quad x \geq 0 \quad \text{III-36}$$

Descarga :

$$T(x, t) = T_{\min} , \quad x = x_0 , \quad t > 0 \quad \text{III-37}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x, t) = T_{\max} , \quad t > 0 \quad \text{III-38}$$

$$T(x, 0) = T_{\max} , \quad x \geq 0 \quad \text{III-39}$$

* condição de contorno fixada por Cabelli⁴

onde:

$$Q(x,t) = (T - T_{\infty}) / (D / (4h) + D^2 \ln(De/D) / (8K') + D^2 / (4D_e h_{\infty})) :$$

Taxa de calor perdida para o meio ambiente, por unidade de volume do fluido.

h : calculado a partir da equação (III-11).

T_{\max} ; T_{\min} : Temperaturas do fluido quente e frio respectivamente.

x_0 : Posição de entrada do fluido quente ou frio no reservatório.

Para adimensionalizar o sistema de equações (III-33) a (III-39), serão utilizados os mesmos parâmetros definidos no item (III-2.1), exceto a temperatura, que será definida como :

$$\theta(X,\tau) = \frac{T(x,t) - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}}$$

Após a adimensionalização (Apêndice E) do sistema de equações (III-33) a (III-39), resulta a equação:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - U \frac{\partial \theta}{\partial X} - \psi_0 \theta - \phi_0 ,$$

$$0 \leq X \leq 1 , \quad \tau > 0 \quad \text{III-40}$$

Sujeita às condições de contorno e inicial:

1. Para a operação de carga:

$$\theta(X,\tau) = 1 , \quad X = X_0 , \quad \tau > 0 \quad \text{III-41}$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} (X, \tau) = 0, \quad \tau > 0 \quad \text{III-42}$$

$$\theta(X, 0) = 0, \quad X \geq 0 \quad \text{III-43}$$

2. Para a operação de descarga:

$$\theta(X, \tau) = 0, \quad X = X_0, \quad \tau > 0 \quad \text{III-44}$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} (X, \tau) = 1, \quad \tau > 0 \quad \text{III-45}$$

$$\theta(X, 0) = 1, \quad X \geq 0 \quad \text{III-46}$$

onde:

$$\Psi_0 = H^2 / (K D / (4h) + K D^2 \ln(De/D) / (8K') + K D^2 / (4D_e h_\infty))$$

$$\phi_0 = \Psi_0 (T_{\min} - T_\infty) / (T_{\max} - T_{\min})$$

A operação de carga, foi resolvida analiticamente por Cabelli ⁴, usando o método da Transformada de Laplace e considerando a temperatura mínima do fluido de trabalho como a temperatura do ambiente no sistema de equações (III-40) a (III-43). Neste trabalho a equação (III-40) é resolvida pelo mesmo método (Apêndice F), porém sem a restrição de temperatura mínima resultando:

$$\begin{aligned} \theta(X, \tau) = & 0,5 \left(\exp((X - X_0)(C_1 - C_2)) \operatorname{erfc}((X_0 - X)/(2\sqrt{\tau}) - \right. \\ & \left. - C_1\sqrt{\tau}) + \exp((X_0 - X)(C_1 + C_2)) \operatorname{erfc}((X_0 - X)/(2\sqrt{\tau}) + \right. \\ & \left. + C_1\sqrt{\tau}) \right) - \phi_0 (1 - \exp(-\Psi_0 \tau)) / \Psi_0 + \phi_0 / 2 \left(\exp((X_0 - X) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (C_2 - C_1) / (C_1 - (C_2)^2) \operatorname{erfc} ((X_0 - X) / (2\sqrt{\tau}) - C_1\sqrt{\tau}) - \\
& - \exp ((X_0 - X) (C_2 + C_1) / (C_1 + (C_2)^2)) \operatorname{erfc} ((X_0 - X) \\
& / (2\sqrt{\tau}) + C_1\sqrt{\tau})) + C_3 \exp ((X_0 - X) C_4 + C_5\tau) \operatorname{erfc} ((X_0 - \\
& - X) / (2\sqrt{\tau}) - (C_2)^2 \sqrt{\tau})
\end{aligned}
\tag{III-47}$$

onde:

$$C_1 = \sqrt{(U^2 + 4\Psi_0) / 4}, \quad C_2 = U/2$$

$$C_3 = 4\phi_0 U^2 / (U^4 - 4U^2 - 16\Psi_0), \quad C_4 = U/2 - U^2/4$$

$$C_5 = U^4/16 - (U^2 + 4\Psi_0)/4$$

O sistema de equações (III-40), (III-44) a (III-46), representa a operação de descarga, que não foi analisada por Cabelli⁴, cuja solução é obtida pelo método da Transformada de Laplace (Apêndice G), produzindo:

$$\begin{aligned}
\theta(X, \tau) = & -0,5 \left(\exp(-\Psi_0\tau) \operatorname{erfc}((X - X_0)/(2\sqrt{\tau}) - \right. \\
& \left. - C_2\sqrt{\tau}) + \exp((X - X_0)U - \Psi_0\tau) \operatorname{erfc}((X - \right. \\
& \left. - X_0)/(2\sqrt{\tau}) + C_2\sqrt{\tau}) \right) + \exp(-\Psi_0\tau) + 2\phi_0 / (U^2 + \\
& + 2\Psi_0) \left(\exp(-C_6\tau) - \exp(-\Psi_0\tau) \right) + \phi_0/2 \left(\exp \right. \\
& \left. ((X - X_0)(C_2 - C_1) / (C_1 - (C_2)^2)) \operatorname{erfc}((X - \right. \\
& \left. X_0) / (2\sqrt{\tau}) - C_1\sqrt{\tau}) - \exp((X - X_0)(C_2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_1)) / (C_1 + (C_2)^2) \operatorname{erfc} ((X - X_0) / (2\sqrt{\tau}) + \\
& + C_1 \sqrt{\tau})) + C_7 \phi_0 \exp ((X - X_0) C_4 + C_8 \tau) \operatorname{erfc} ((X - \\
& - X_0) / (2\sqrt{\tau}) - (C_2)^2 \sqrt{\tau})
\end{aligned}
\tag{III-48}$$

onde:

$$C_6 = (U^2 + 4\Psi_0) / 2 , \quad C_7 = 4U^2 / (-3U^2 - \Psi_0)$$

$$C_8 = - 3 U^2 / 16 + \Psi_0$$

CAPÍTULO IV - EFICIÊNCIA TÉRMICA

IV.1 - Introdução

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos básicos da termodinâmica e determinadas as eficiências de um sistema de estocagem térmica para fluidos com ou sem estratificação térmica, considerando a Primeira e Segunda Lei da Termodinâmica. Através deste estudo pode ser analisada a possibilidade de um fluido contido num reservatório estocar energia sob forma de calor, como também de apresentar uma disponibilidade em termos de trabalho útil que poderá daí ser retirado.

A máxima quantidade de energia sob forma de calor que um líquido num reservatório pode estocar depende de vários parâmetros como: características físico-químicas do fluido (que podem ser denominadas X_1, X_2, \dots, X_n), das suas temperaturas máxima e mínima, T_{\max} e T_{\min} respectivamente, necessárias ao bom desempenho do sistema de estocagem e do subsistema de conversão termodinâmica:

$$E_{\max} = E_{\max} (T_{\min}, T_{\max}, X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{IV-1}$$

Após um tempo t , a quantidade de energia térmica contida na unidade de estocagem é uma função das características térmicas do tanque z_1, z_2, \dots, z_m , e também dos parâmetros $X_1, X_2, \dots, X_n, T_{\max}, T_{\min}$, da temperatura ambiente T_0 e do fluxo de massa que cruza a fronteira do volume de controle:

$$E = E (T_{\min}, T_{\max}, X_1, X_2, \dots, X_n, z_1, z_2, \dots, z_m, t, T_0, \dot{m}) \quad \text{IV-2}$$

Mas, para um sistema de estocagem, não é importante somente a sua capacidade de estocar energia térmica, mas também a possibilidade que este sistema possui de armazenar trabalho útil. Supondo B' e B'_{\max} como os trabalhos disponíveis estocados, quando as energias forem E e E_{\max} , respectivamente tem-se:

$$B'_{\max} = B'_{\max} (T_{\min}, T_{\max}, X_1, X_2, \dots X_n) \quad \text{IV-3}$$

e

$$B' = B' (T_{\min}, T_{\max}, X_1, X_2, \dots X_m, Z_1, Z_2, \dots Z_m, t, T_0, \dot{m}) \quad \text{IV-4}$$

IV.2 - Energia e eficiência térmica do sistema de estocagem, a partir da Primeira Lei da Termodinâmica

A massa no interior de um volume de controle considerado no fluido é, constante pois os fluxos do fluido que sai é igual ao fluxo de fluido que entra, nas situações de carga e descarga, ao passo que nenhuma massa abandona o sistema na situação de resfriamento. O problema fica então reduzido ao estudo da capacidade que uma massa constante no interior do reservatório tem de conservar energia térmica.

Considerando um fluido incompressível a expressão da energia conservada em um sistema fechado entre dois estados quaisquer, desprezando-se as variações de energia cinética e potencial, será:

$$E = M' \Delta u'_i \quad \text{IV-5}$$

onde:

M' : Massa do fluido no interior do tanque.

$\Delta u'_i$: Variação da anergia interna específica do fluido no interior do tanque, entre dois estados ($i = 1, 2$).

Também, sendo C_p independente da temperatura:

$$\Delta u' = C_p \Delta T \quad \text{IV-6}$$

Considerando que o fluido no interior do reservatório se apresenta estratificado num instante t (porém mantendo uma temperatura constante em pequenos elementos de altura ΔH), ele apresentará num tempo subsequente t_{final} uma temperatura homogênea e de referência T_{min} . Pode-se então, escrever para a variação da energia interna total da massa de fluido no tanque, entre os instantes t e t_{final} :

$$M (u'_t - u'_{t_{\text{final}}}) = U'_t - U'_{t_{\text{final}}} = \rho A C_p \int_0^H (T (x, t) - T_{\text{min}}) dx. \quad \text{IV-7}$$

onde:

A : Área da seção reta do reservatório.

Portanto, a energia disponível entre um instante t qualquer e o instante t_{final} , para a massa de fluido estratificada no reservatório, será:

$$E_{t-t_{\text{final}}} = \rho A C_p \int_0^H (T (x, t) - T_{\text{min}}) dx \quad \text{IV-8}$$

Considerando que, $T(x, t)$ será conhecida para um número limitado de pontos distribuídos com espaçamento constante ao longo da altura do reservatório, a equação (IV-8) pode ser escrita em forma de somatório finito:

$$E_{t-t_{\text{final}}} = \rho A C_p \sum_{i=1}^{N_p-1} (T(x, t) - T_{\min}) \Delta x_i \quad \text{IV-9}$$

onde:

N_p : Número de pontos distribuídos ao longo da altura, no centro do reservatório.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$: Espaçamento constante entre os pontos.

Quando toda a massa de fluido, no interior do reservatório, encontra-se a mesma temperatura para cada instante de tempo (caso de não ocorrência de estratificação), a equação (IV-8) ou (IV-9) torna-se:

$$E_{t-t_{\text{final}}} = M' C_p (T(t) - T_{\min}) \quad \text{IV-10}$$

Por outro lado, no instante em que a carga é máxima, a temperatura do fluido no interior do tanque fica homogênea e igual a T_{\max} , e partindo de um estado inicial a T_{\min} , a energia máxima será:

$$E_{0-t_{\text{final}}} = E_{\max} = M' C_p (T_{\max} - T_{\min}) \quad \text{IV-11}$$

Considerando a massa de fluido no interior do reservatório, pode se definir uma eficiência térmica através da Primeira Lei da Termodinâmica como sendo a relação en-

tre a energia interna no instante t e a energia interna máxima suportada pelo sistema, tomando-se como base a energia interna mínima (suposta nula);

a) caso da estratificação térmica

$$\eta_e = \frac{E_{t=t_{\text{final}}}}{E_{\text{max}}} = \frac{\int_0^H (T(x,t) - T_{\text{min}}) dx}{H (T_{\text{max}} - T_{\text{min}})} \quad \text{IV-12}$$

b) caso da temperatura homogênea em cada instante de tempo

$$\eta_h = \frac{E_{t=t_{\text{final}}}}{E_{\text{max}}} = \frac{T(t) - T_{\text{min}}}{T_{\text{max}} - T_{\text{min}}} \quad \text{IV-13}$$

IV.3 - Trabalho disponível e eficiência térmica do sistema de estocagem, a partir da Segunda Lei da Termodinâmica.

O trabalho disponível pode ser obtido através da determinação da capacidade que uma massa constante no interior do reservatório tem de realizar trabalho por um processo reversível.

A expressão do trabalho reversível obtível de um sistema fechado entre dois estados quaisquer, desprezando-se as variações de energia cinética e potencial FABRY¹⁷, é:

$$B' = M' ((u'_t - T_0 s_t) - (u'_{t_{\text{final}}} - T_0 s_{t_{\text{final}}})) \quad \text{IV-14}$$

onde:

s_t , $s_{t_{\text{final}}}$: Entropia específica do fluido no interior do tanque nos estados t e t_{final} respectivamente.

Para um fluido incompressível e com C_p independente da temperatura, Fabry¹⁷:

$$\Delta s = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} \quad \text{IV-15}$$

O mesmo raciocínio utilizado na obtenção da equação (IV-7), aplicado à determinação da variação da entropia total da massa no interior do tanque, fornecerá a expressão:

$$M'(s_t - s_{t_{\text{final}}}) = S_t - S_{t_{\text{final}}} = \rho A C_p \int_0^H \ln \frac{T(x,t)}{T_{\min}} dx \quad \text{IV-16}$$

Portanto, a expressão do trabalho entre um instante t qualquer e o instante t_{final} , para a massa estratificada termicamente no reservatório, é obtida substituindo-se as equações (IV-7) e (IV-16) na equação (IV-14), produzindo:

$$B'_{t-t_{\text{final}}} = \rho A C_p \int_0^H ((T(x,t) - T_{\min}) - T_o \ln \frac{T(x,t)}{T_{\min}}) dx \quad \text{IV-17}$$

No instante em que a carga for máxima tem-se:

$$B'_{o-t_{\text{final}}} = B'_{\max} = \rho A C_p ((T_{\max} - T_{\min}) - T_o \ln \frac{T_{\max}}{T_{\min}}) H \quad \text{IV-18}$$

Definindo-se então, uma relação entre o trabalho reversível no tempo t e o trabalho reversível máximo, como índice da capacidade da massa estratificada termicamente, no interior do tanque de realizar trabalho, do tempo t até

t_{final} (que é a eficiência térmica do sistema a partir da Segunda Lei da Termodinâmica), pode-se escrever:

$$\epsilon_e = \frac{B'_{t-t_{\text{final}}}}{B'_{\text{max}}} = \frac{\int_0^H ((T(x,t) - T_{\text{min}}) - T_0 \ln(T(x,t)/T_{\text{min}})) dx}{H ((T_{\text{max}} - T_{\text{min}}) - T_0 \ln(T_{\text{max}}/T_{\text{min}}))} \quad \text{IV-19}$$

Quando a massa no interior do reservatório, apresentar uma temperatura homogênea, dependente do tempo, a equação (IV-17), ficará reduzida à expressão:

$$B'_{t-t_{\text{final}}} = \rho A H ((T(t) - T_{\text{min}}) - T_0 \ln \frac{T(t)}{T_{\text{min}}}) \quad \text{IV-20}$$

Consequentemente, a eficiência térmica a partir da Segunda Lei para a massa termicamente homogênea no interior do reservatório, torna-se:

$$\epsilon_h = \frac{B'_{t-t_{\text{final}}}}{B'_{\text{max}}} = \frac{(T(t) - T_{\text{min}}) - T_0 \ln(T(t)/T_{\text{min}})}{(T_{\text{max}} - T_{\text{min}}) - T_0 \ln(T_{\text{max}}/T_{\text{min}})} \quad \text{IV-21}$$

Por outro lado, a temperatura instantânea média do fluido $T(t)$ pode ser determinada a partir das temperaturas do fluido estratificado, pela relação:

$$T(t) = \frac{1}{H} \int_0^H T(x,t) dx \quad \text{IV-22}$$

Portanto, conclui-se que, para os mesmos valores de T_{max} , T_{min} e \dot{m} , a eficiência térmica pela Primeira Lei da Termodinâmica é a mesma, tanto para o fluido estratificado quanto para o fluido com uma temperatura instantânea homogênea, para qualquer instante de tempo.

Por outro lado, usando-se as equações (IV-19) e (IV-21), juntamente com (IV-22), demonstra-se que para as mesmas T_{\max} , T_{\min} e \dot{m} , a eficiência térmica do fluido estratificado, pela Segunda Lei da Termodinâmica, é em qualquer instante de tempo, maior do que aquela para o fluido homogêneo, (Apêndice H), ou seja:

$$\epsilon_{\text{estratificado}} > \epsilon_{\text{homogêneo}} \quad \text{IV-23}$$

CAPÍTULO V - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

V.1 - Introdução

Nos capítulos precedentes foi proposto e analisado um modelo matemático objetivando a simulação das operações de carga, descarga e resfriamento natural de um fluido em um reservatório.

Procurou-se formular o modelo de forma a mais geral possível, de modo a aproximar os resultados teóricos e os dados experimentais, a níveis de precisão aceitáveis.

O fluido de trabalho utilizado nas operações de carga, descarga e resfriamento, foi o óleo "Giloterm TH", cuja temperatura de ebulição à pressão atmosférica é de 360°C .

Os resultados foram obtidos para uma vazão constante (carga $1,85\text{ kg/s}$ e descarga $1,04\text{ kg/s}$), e as temperaturas do óleo variando entre 250°C e 330°C na carga e de 200°C a 330°C na descarga, enquanto no resfriamento natural a variação foi entre 330°C e 360°C .

Com a finalidade de comparar os resultados teóricos obtidos com o modelo semi-empírico desenvolvido com os dados experimentais disponíveis na literatura (6), foram adotadas as mesmas características de tipo de fluido, regime de escoamento, nível de temperatura, reservatório de aço (cilindro vertical de diâmetro interno $2,5\text{m}$ e altura 6m) e material isolante (lã de rocha de espessura $0,08\text{m}$) assim como as condições ambientais (temperatura ambiente $0,3^{\circ}\text{C}$).

Embora o método implícito de Crank-Nicolson, utilizado na solução numérica do modelo, seja estável para to-

dos os valores da razão $\lambda = \Delta\tau/\Delta x^2$ Carnahan⁸, para valores de $\lambda > 2,5$ ($\Delta\tau > 0,0173$) ocasionava uma divergência nos resultados, o que poderá ser devido a uma aproximação imprecisa da derivada primeira das temperaturas em relação ao tempo ($\partial\theta/\partial\tau$), como citado por Smith¹⁸.

Para obtenção dos resultados através da via numérica, utilizando um computador Burroughs B6700, na operação de carga como na descarga, foi necessário um tempo de processamento igual a 9,0 segundos, enquanto que na operação de resfriamento foi de 180 segundos.

Neste capítulo, pretende-se analisar os resultados obtidos seguindo basicamente quatro procedimentos:

- A precisão entre os resultados obtidos com o modelo proposto e os dados experimentais.
- O comportamento do gradiente de temperatura na parede interna do reservatório.
- A disponibilidade térmica do processo de estocagem, por estratificação e homogeneização do fluido de trabalho, em relação a Primeira e Segunda Lei da Termodinâmica.
- A influência das características físicas e geométricas do reservatório e do fluido de trabalho, no processo de estocagem.

Na operação de carga, o fluido quente entra no topo do reservatório através de difusores, ocorrendo o deslocamento da frente quente para o fundo do reservatório. O comportamento desta operação é mostrado nas figuras (V-1a,b,c), (V-2), (V-3), (V-4) e (V-5).

As figuras (V-6a,b,c), (V-7), (V-8), (V-10), (V-11) e (V-12), apresentam o comportamento da operação de des

carga ou seja o fluido frio é injetado pelo fundo do reservatório, através de difusores, deslocando a frente quente para o topo do reservatório.

O comportamento da operação de resfriamento (ausência de carga e descarga) é apresentado nas figuras (V-13), (V-14), (V-15), (V-16) e (V-17).

V.2 - Operação de Carga

A medida do tempo real na operação de carga teve início a partir do tanque completamente descarregado ($t = 0,0S$), mas o registro dos dados experimentais (6), foi iniciado ($t = 0,0S$) com o tanque parcialmente carregado, produzindo uma defasagem de tempo de aproximadamente 1000 segundos entre o tempo real de carga e o experimental, como é mostrado na figura (V-4), comparando-se os perfis de temperatura por solução numérica para os instantes 1000 e 2000 segundos e os dados experimentais apresentados para os instantes 0,0 e 1000 segundos.

Com o perfil inicial em degrau de temperatura em $H = 6m$ (tanque completamente descarregado) e considerando-se a defasagem de tempo de 1000 segundos, são mostrados nas figuras (V-1a,b,c) os perfis de temperatura por solução analítica para os instantes 4000, 5000 e 6000 segundos respectivamente, correspondentes aos dados experimentais apresentados para os instantes 3000, 4000 e 5000 segundos.

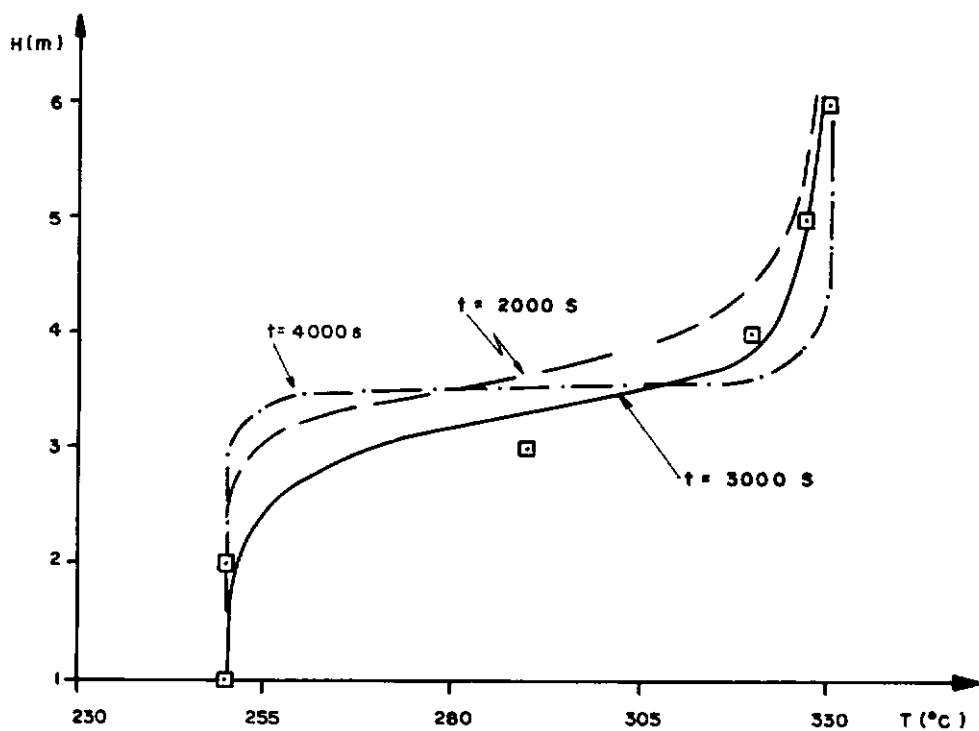
Os perfis de temperatura na operação de carga, por solução numérica para os instantes 3000, 4000 e 5000 segundos (considerando o perfil inicial de temperatura como

igual ao perfil experimental no instante 2000 segundos), bem como os dados experimentais (6) relativos aos mesmos instantes, são também apresentados nas mesmas figuras (V-1a,b,c) respectivamente.

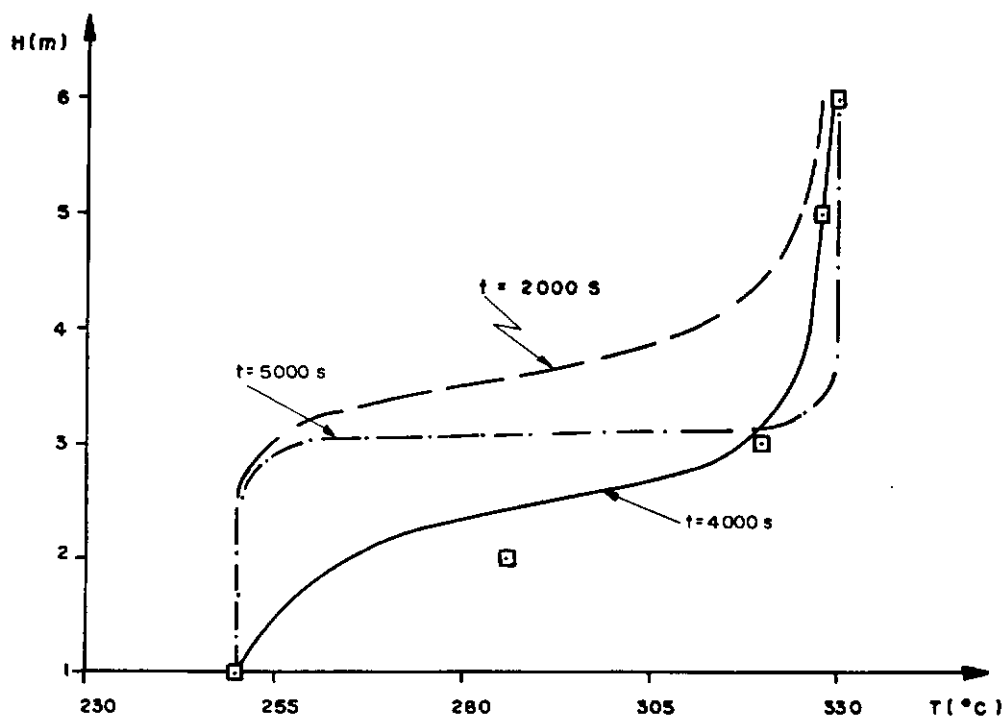
Pode ser visto nas figuras (V-1a,b,c), que o perfil de temperatura fornecido pela solução numérica é o que mais se aproxima dos dados experimentais. O erro máximo encontrado para os pontos fora da região de transição é da ordem de 1%; enquanto que na região de transição está na ordem de 7%, devido à influência de alguns fatores como:

- a) Os termopares utilizados na obtenção dos dados experimentais, possuem tempo de resposta muito grande em relação ao tempo de passagem da frente quente.
- b) o espaçamento entre os termopares é maior do que a espessura da região de transição, impossibilitando a localização precisa desta região.
- c) O elevado gradiente de temperatura nesta região provoca uma difusão de calor entre as camadas, o que gera uma zona de mistura não prevista no modelo proposto.
- d) O uso de correlações empíricas na formulação do modelo, implica em simplificações que afetam os resultados obtidos.
- e) As perturbações provocadas pela concepção dos difusores utilizados no experimento, não são previstas no modelo.

A medida que a frente quente se aproxima do fundo do reservatório, a solução numérica se afasta dos dados experimentais, sendo que a solução analítica distancia-se ainda mais, figura (V-1c) isto devido a zona de turbulência neste lo



a) Perfis de temperatura do fluido no centro do tanque



b) Perfis de temperatura do fluido no centro do tanque

Figura V-1 Operação de carga

Temperatura ambiente = $0,3^{\circ}C$; Vazão = $1,65\text{ Kg/s}$ ($Re = 2,04 \times 10^5$)

- Perfil inicial = Perfil experimental
- Perfil por solução numérica
- .-.- Perfil por solução analítica
- Dados experimentais, CNRS⁶

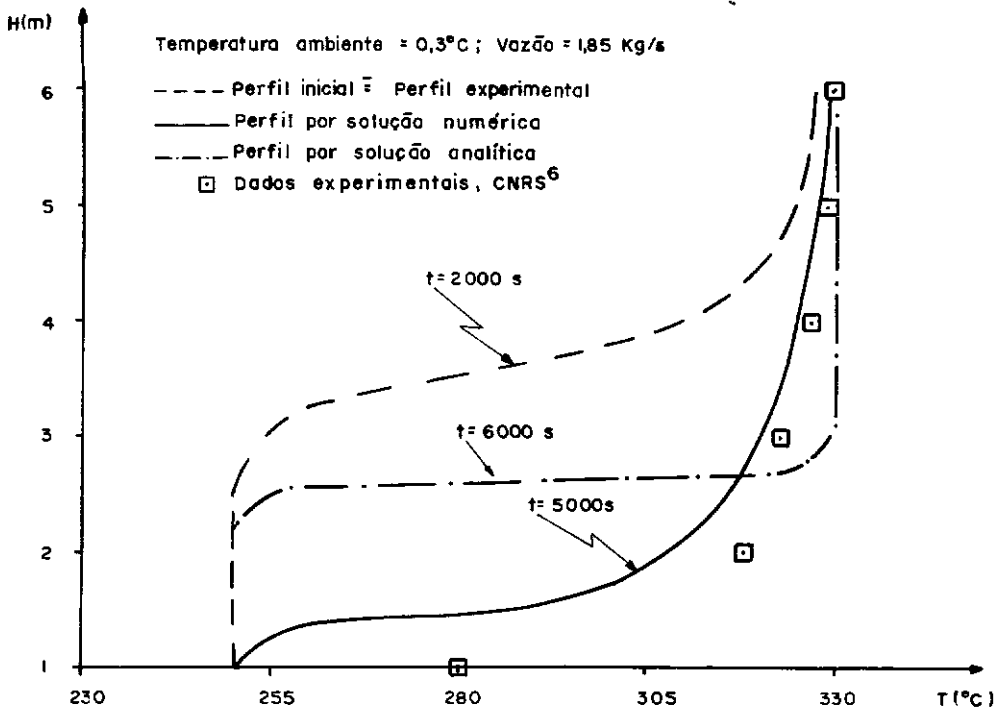


Figura V-1C Perfis de temperatura do fluido no centro do tanque na operação de carga.

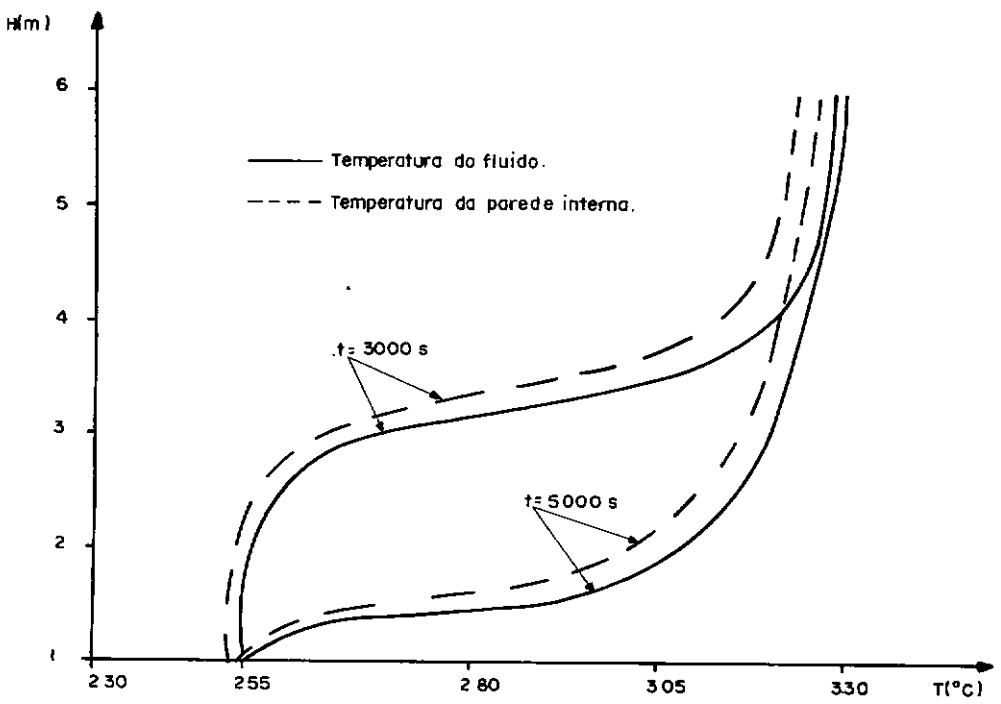


Figura V-2 Perfis de temperatura do fluido e da parede interna do tanque para a operação de descarga, pela solução numérica.

Temperatura ambiente = $0,3^{\circ}\text{C}$; Vazão = $1,85 \text{ Kg/s}$

cal, provocada pela extração do fluido frio.

O perfil de temperatura correspondente à solução analítica do modelo proposto simplificado, coincide com os dados experimentais na região fria, afastando-se dos mesmos nas regiões quente e de transição, uma vez que naquela região, o fluido quente que desce encontra a parede interna do reservatório ainda com a temperatura de equilíbrio com o fluido frio.

Na operação de carga, a frente de fluido quente, se desloca para o fundo do reservatório, em contato com a parede interna fria, produzindo um elevado gradiente de temperatura transiente, entre o fluido e a parede, como mostra a figura (V-2). Este fator não é previsto no modelo proposto simplificado, que considera constante a temperatura na parede interna do reservatório.

Este efeito é mais pronunciado na camada quente, figuras (V-1a,b,c) causando, nesta região, as maiores discrepâncias entre os resultados experimentais e aqueles obtidos pelo modelo simplificado.

Os perfis transientes da temperatura na parede interna do reservatório, durante a operação de carga, para os instantes 3000, 4000 e 5000 segundos, obtidos pela solução numérica são mostrados na figura (V-3).

Devido a inexistência de dados experimentais para a parede do reservatório, adotou-se como perfil inicial a temperatura tal como medida no centro do tanque. Observa-se então, que após um certo tempo, o próprio modelo se encarrega de corrigir estes perfis, com um efeito aparente de decréscimo e posterior recuperação das temperaturas.

Observa-se também na figura (V-3), um eleva-

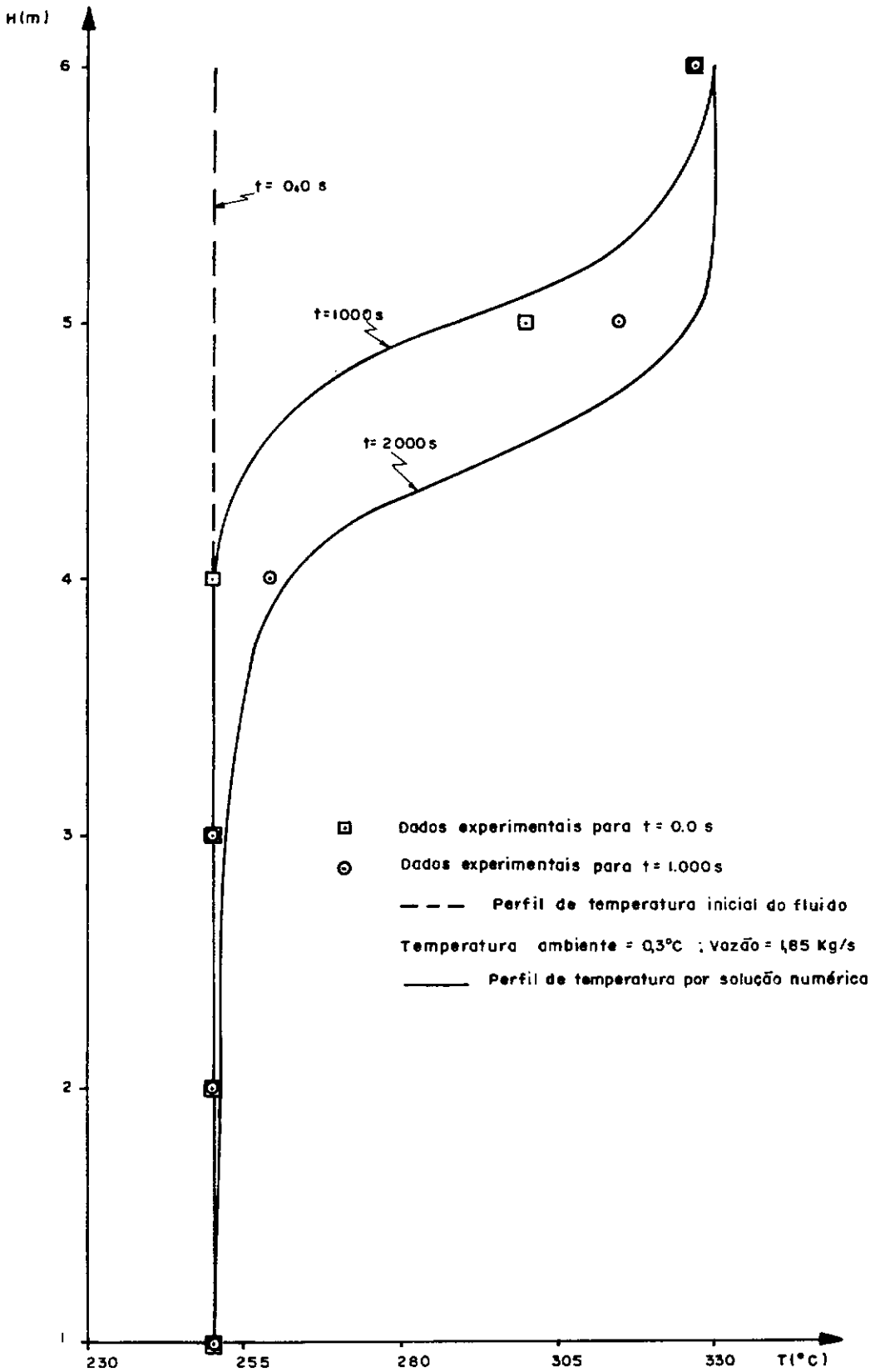


Figura V- 4

Perfis de temperatura por solução numérica, na operação de carga, considerando o tanque descarregado totalmente no instante inicial.

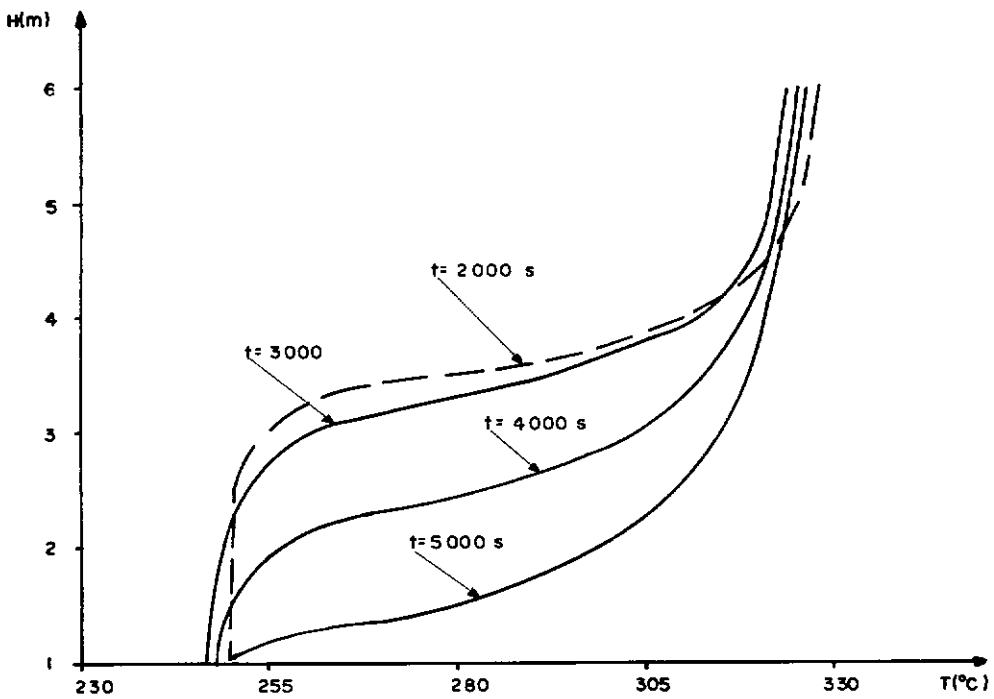


Figura V-3 Perfis de temperatura na parede interna do tanque durante a operação de carga.

Temperatura ambiente = $0,3^{\circ}\text{C}$; vazão = $1,85 \text{ Kg/s}$

- Perfil inicial \equiv Perfil de temperatura experimental do fluido no centro do tanque.
 ——— Perfis por solução numérica

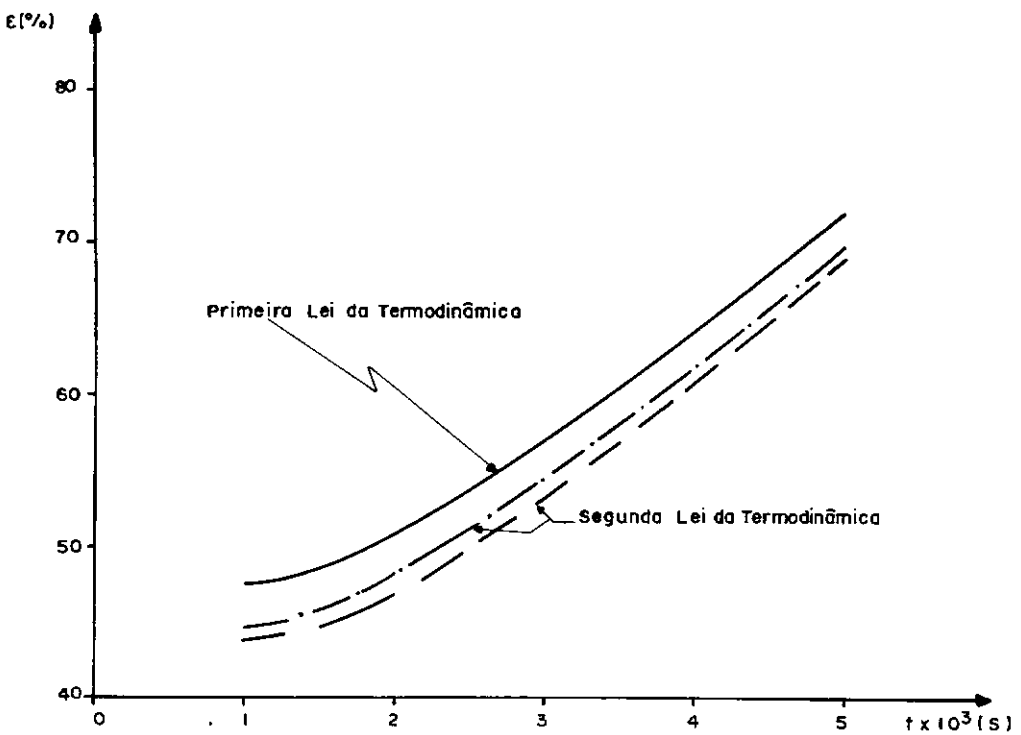


Figura V-5 Eficiência térmica para o fluido no interior do tanque, na operação de carga.

- Temperatura ambiente $0,3^{\circ}\text{C}$; Vazão = $1,85 \text{ Kg/s}$
 ——— Fluido homogêneo Fluido estratificado.
 - - - - - Fluido estratificado termicamente.
 - - - - - Fluido homogêneo termicamente.

do gradiente de temperatura axial transiente na parede do reservatório. Este comportamento gera um acúmulo de tensões térmicas na parede do reservatório e no isolante, exigindo uma atenção especial por parte do projetista, na escolha dos materiais constitutivos e na construção do reservatório. Para o cálculo destas tensões térmicas é necessário o conhecimento dos perfis transientes de temperatura, o que é fornecido pelo modelo.

A partir de um perfil inicial em degrau de temperatura para o fluido (tanque completamente descarregado). figura (V-4), portanto diferente do perfil inicial até agora considerado, obteve-se o perfil de temperatura no tempo $t = 1000$ segundos, que coincide razoavelmente com o perfil considerado inicial no experimento. Comparando-se então o perfil numérico no tempo $t = 2000$ segundos, com o perfil experimental considerado a 1000 segundos, pode-se observar a boa concordância de ambos os pares de curvas.

Observa-se, ainda na figura (V-4), um erro da ordem de 4%, entre o perfil de temperatura calculado e os dados experimentais, para os pontos localizados na região de transição, enquanto que os pontos fora desta região apresentam um erro máximo de 1,5%. Embora as causas possam ser as mesmas citadas na análise das figuras (V-1a,b,c); a pequena diferença entre os erros obtidos neste estudo e os encontrados nos estudos anteriores (região de transição 7% e pontos fora desta região 1%), deve-se ao fato de que os perfis de temperatura numéricos da figura (V-4), não correspondem exatamente aos perfis experimentais do mesmo instante real do tempo. E essa correspondência é muito difícil de ser obtida com precisão.

Na figura (V-5), é apresentado o comportamento da eficiência térmica com o tempo, pela Primeira e Segunda Lei da Termodinâmica para o fluido estratificado e homogêneo termicamente, durante a operação de carga, observando-se que:

1. As eficiências aumentam com o tempo, nesta operação.
2. A eficiência, pela Primeira Lei da Termodinâmica é maior que a eficiência pela Segunda Lei da Termodinâmica para fluido estratificado e esta maior que a eficiência pela Segunda Lei da Termodinâmica para o fluido homogêneo termicamente.
3. Pela Primeira Lei da Termodinâmica, tanto o fluido homogêneo como o estratificado possuem a mesma eficiência, pois esta lei considera somente o balanço energético no interior do reservatório.
4. Ao se considerar a taxa de energia interna do reservatório que pode ser convertida em trabalho, encontra-se uma diferença entre as eficiências calculadas para o fluido estratificado e homogêneo, pois a homogeneização implica em aumento da entropia do fluido no interior do reservatório.

V.3 - Operação de descarga

Analogamente à operação de carga, na descarga também ocorre uma defasagem de tempo de 1000 segundos entre o tempo real de descarga e o experimental, como mostrado na figura (V-8) pelos perfis de temperatura por solução numérica para os instantes 2000 e 5000 segundos e os dados experimentais apresentados para os instantes 1000 e 4000 segundos.

A partir de um perfil inicial em degrau de

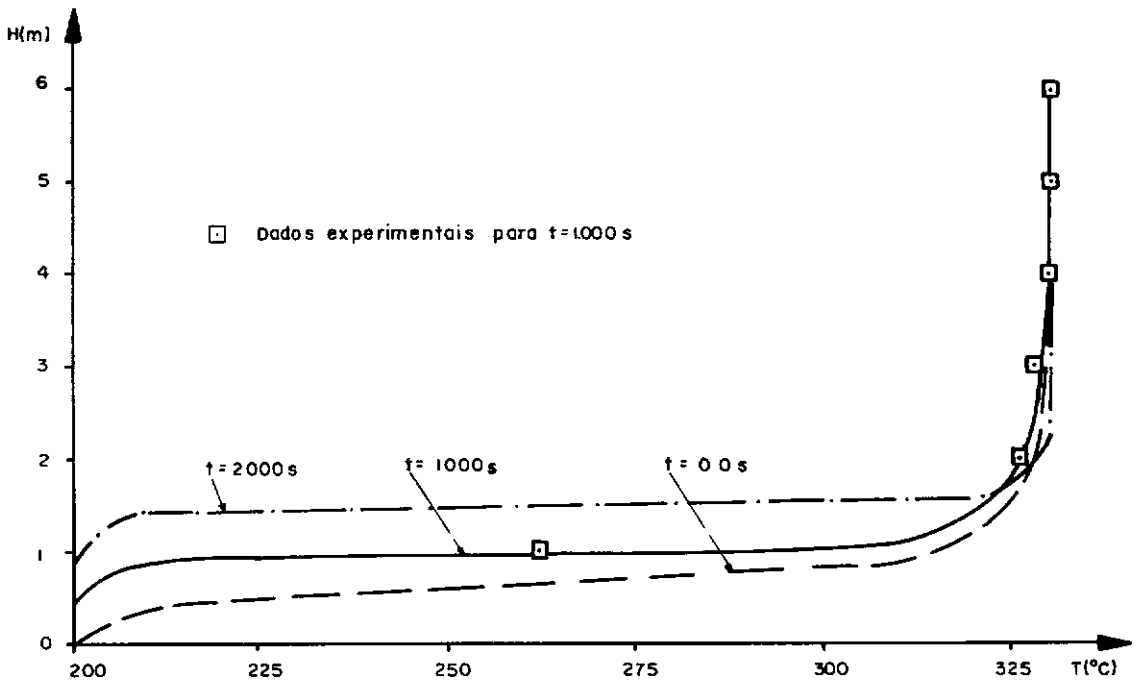
temperatura em $H = 0,0\text{m}$ (tanque totalmente carregado) e considerando-se a defasagem de tempo de 1000 segundos, são apresentados nas figuras (V-6a,b,c) os perfis de temperatura por solução analítica para os instantes 2000, 3250 e 5000 segundos respectivamente correspondentes aos dados experimentais apresentados para os instantes 1000, 2250 e 4000 segundos na operação de descarga.

Nas mesmas figuras (V-6a,b,c) são mostrados os perfis de temperatura por solução numérica para os instantes 1000, 2250 e 4000 segundos respectivamente (considerando-se o perfil inicial de temperatura como igual ao perfil experimental no instante 0,0 segundos), assim como os dados experimentais (6) para os mesmos instantes de tempo na operação de descarga.

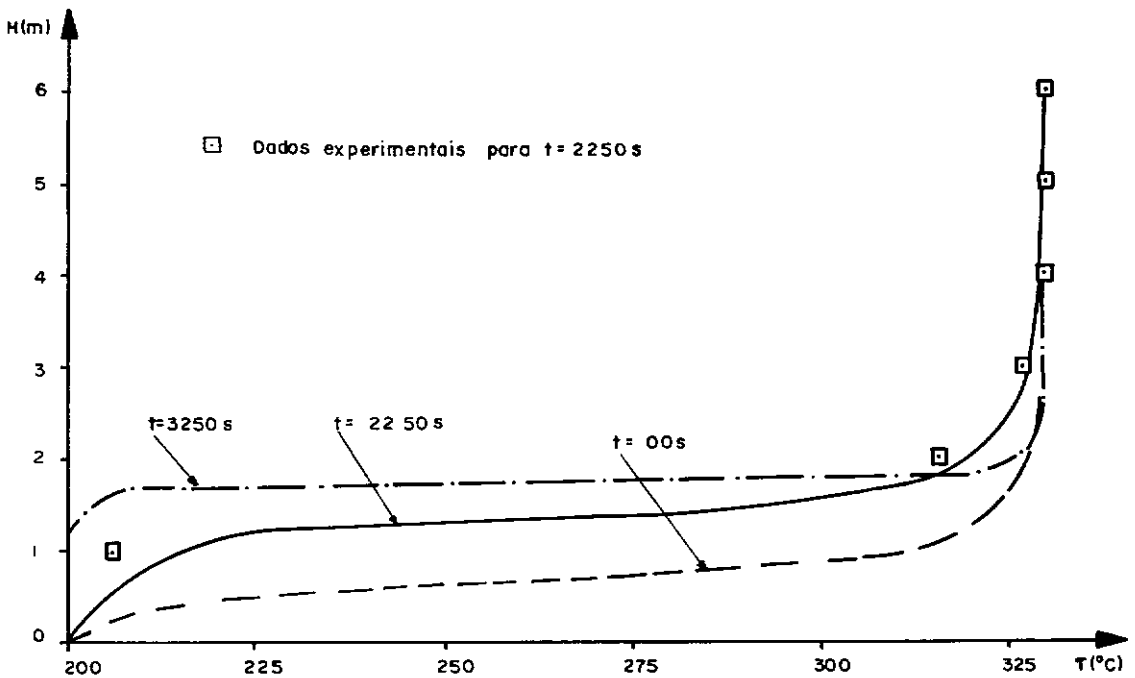
Observa-se que a solução numérica nesta operação, está mais próxima dos dados experimentais, do que na operação de carga. Isto pode ser devido à redução da vazão 1,85 kg/s na carga, para 1,04 kg/s na descarga, o que implica em diminuição da velocidade da frente quente, permitindo uma maior tolerância no tempo de resposta dos termopares.

O erro máximo encontrado nos pontos fora da região de transição foi da ordem de 0,5% (na operação de carga 1%), enquanto que para os pontos na região de transição, foi de 6% (na operação de carga 7%). Nota-se que os erros para os pontos fora da região de transição caíram à metade, enquanto que os erros para os pontos na região de transição sofreram pequena queda (~1%), uma vez que estas discrepâncias não dependem somente da vazão utilizada, mas também dos parâmetros expostos no item (5-2a,b,c,d).

Na operação de descarga, a solução analítica



a) Perfis de temperatura do fluido no centro do tanque.



b) Perfis de temperatura do fluido no centro do tanque.

Figura V-6 Operação de descarga

- T_{fluido} : Solução numérica
- - - T_{fluido} : Solução analítica
- - - Perfil inicial = Perfil experimental

Temperatura ambiente = 0,3 $^{\circ}\text{C}$; Vazão = 1,04 Kg/s ($Re = 1,16 \times 10^5$)

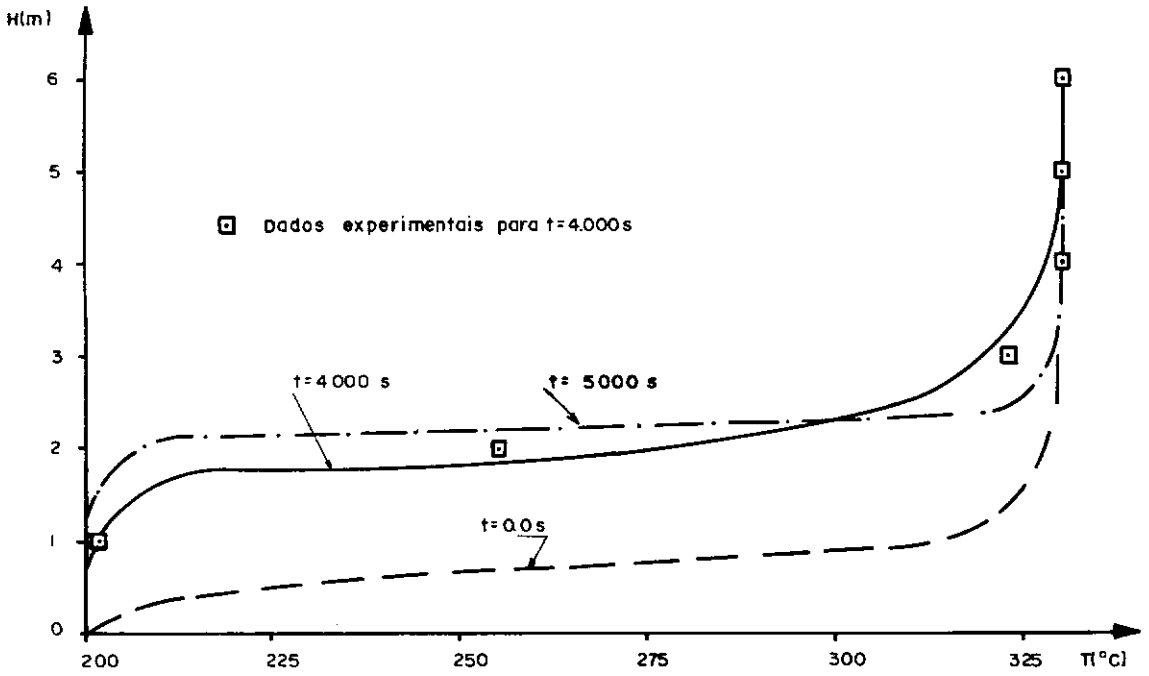


Figura V-6 c - Perfis de temperatura do fluido no centro do tanque na operação de descarga.

— T_{fluido} : Solução numérica
 - · - T_{fluido} : Solução analítica
 - - - Perfil inicial \equiv Perfil experimental
 Temperatura ambiente = $0,3^{\circ}\text{C}$; Vazão = $1,04 \text{ Kg/s}$

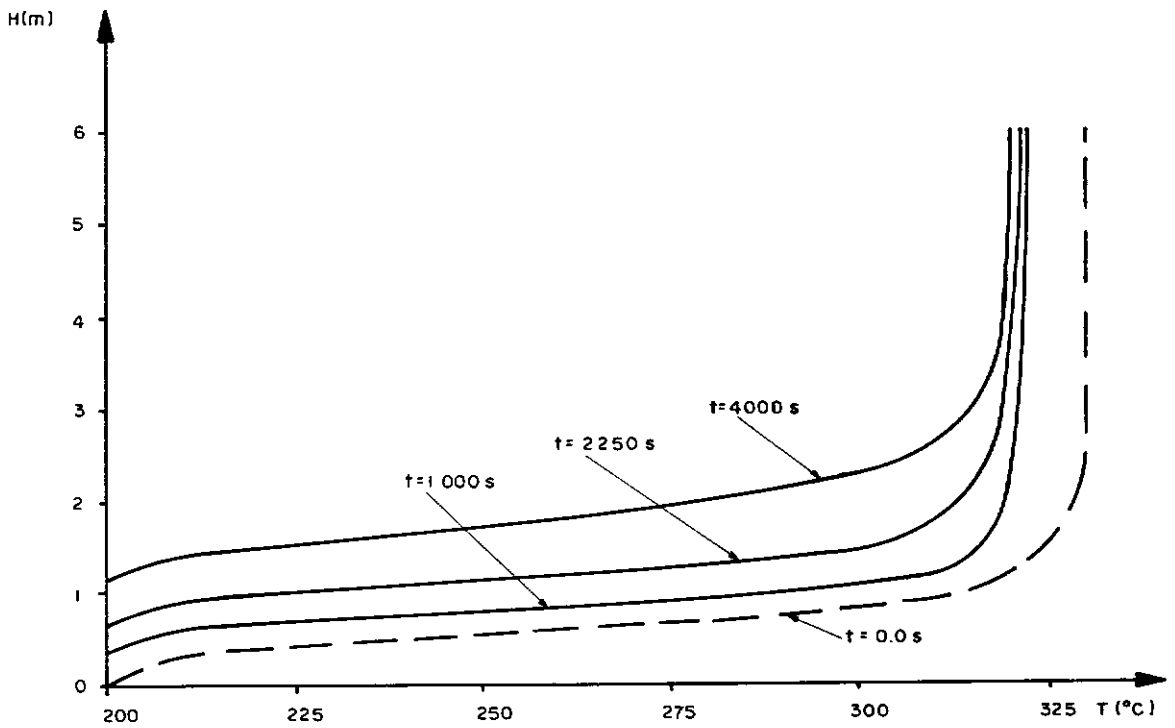


Figura V-7 - Perfis de temperatura na parede interna do tanque durante a operação de descarga.

- - - Perfil inicial \equiv Perfil experimental \equiv Perfil de temperatura do fluido no centro do tanque.
 — Perfis de temperatura na parede interna, por solução numérica.
 Temperatura ambiente = $0,3^{\circ}\text{C}$; Vazão = $1,04 \text{ Kg/s}$

do modelo proposto simplificado aproximou-se mais dos dados experimentais, no topo do tanque e na zona de transição ao contrário do que na operação de carga, isto devido a causas tais como:

- a) A redução na vazão diminui o efeito de mistura e consequentemente implicou num decréscimo na espessura da zona de transição.
- b) A frente fria ao subir, encontra a parede interna do reservatório à temperatura do gradiente de equilíbrio, ou seja razoavelmente inalterável, o que satisfaz a uma das hipóteses do modelo simplificado.

A figura (V-7), apresenta os perfis de temperatura transiente da parede interna do reservatório, para os instantes de tempo 1000, 2250 e 4000 segundos, onde observa-se que:

- 1) O perfil inicial de temperatura na parede interna, adotado como igual ao perfil do fluido no centro do reservatório, não corresponde à realidade, uma vez que ocorre uma queda brusca de temperatura entre o instante inicial e o primeiro perfil calculado, o que não ocorre com os demais perfis.
- 2) Ocorreu um gradiente de temperatura axial maior do que na operação de carga. Isto é devido ao fato de que, se antes da chegada da frente fria, a parede interna perdia calor apenas ao ambiente, no instante da transição, a parede estará com temperatura maior do que a do fluido frio e a do meio ambiente, o que faz com que ela perca calor para o fluido e para o ambiente. No momento em que a temperatura da parede igualar a temperatura do fluido, a perda de calor

dar-se-ã apenas para a atmosfera, com um decréscimo ainda maior da temperatura da parede com relação à do fluido, até o estabelecimento do gradiente de equilíbrio.

Este elevado gradiente de temperatura transiente axial, causa o aparecimento de tensões térmicas nesta região do reservatório, como na operação de carga. Entretanto, na operação de descarga, este fenômeno é ainda mais importante do que nos outros casos.

A figura (V-8), apresenta seis perfis de temperatura transiente do fluido, quando o perfil inicial de temperatura é considerado como uma função degrau (tanque completamente carregado), além dos dados experimentais correspondentes a dois instantes de tempo 1000 e 4000 segundos.

O perfil obtido através do estudo numérico correspondente a 2000 segundos é o que mais se aproxima dos dados experimentais para 1000 segundos, enquanto que aquele correspondente a 5000 segundos é o que melhor se aproxima dos dados experimentais para 4000 segundos, ou seja pode-se afirmar que as medidas experimentais foram registradas após decorrerem aproximadamente 1000 segundos de descarga. A importância dessas curvas é a mesma já explicada na operação de carga.

Os mesmos erros calculados entre a solução numérica e os dados experimentais referentes aos testes anteriores tanto para os pontos na região de transição (-7%) quanto fora desta (-1%), também se reproduzem aproximadamente na figura (V-8). As justificativas das discrepâncias são as mesmas da análise da figura (V-1a,b,c).

As figuras (V-9) e (V-10), apresentam a influência do Número de Nusselt equivalente (Nu_{eq}) que é função

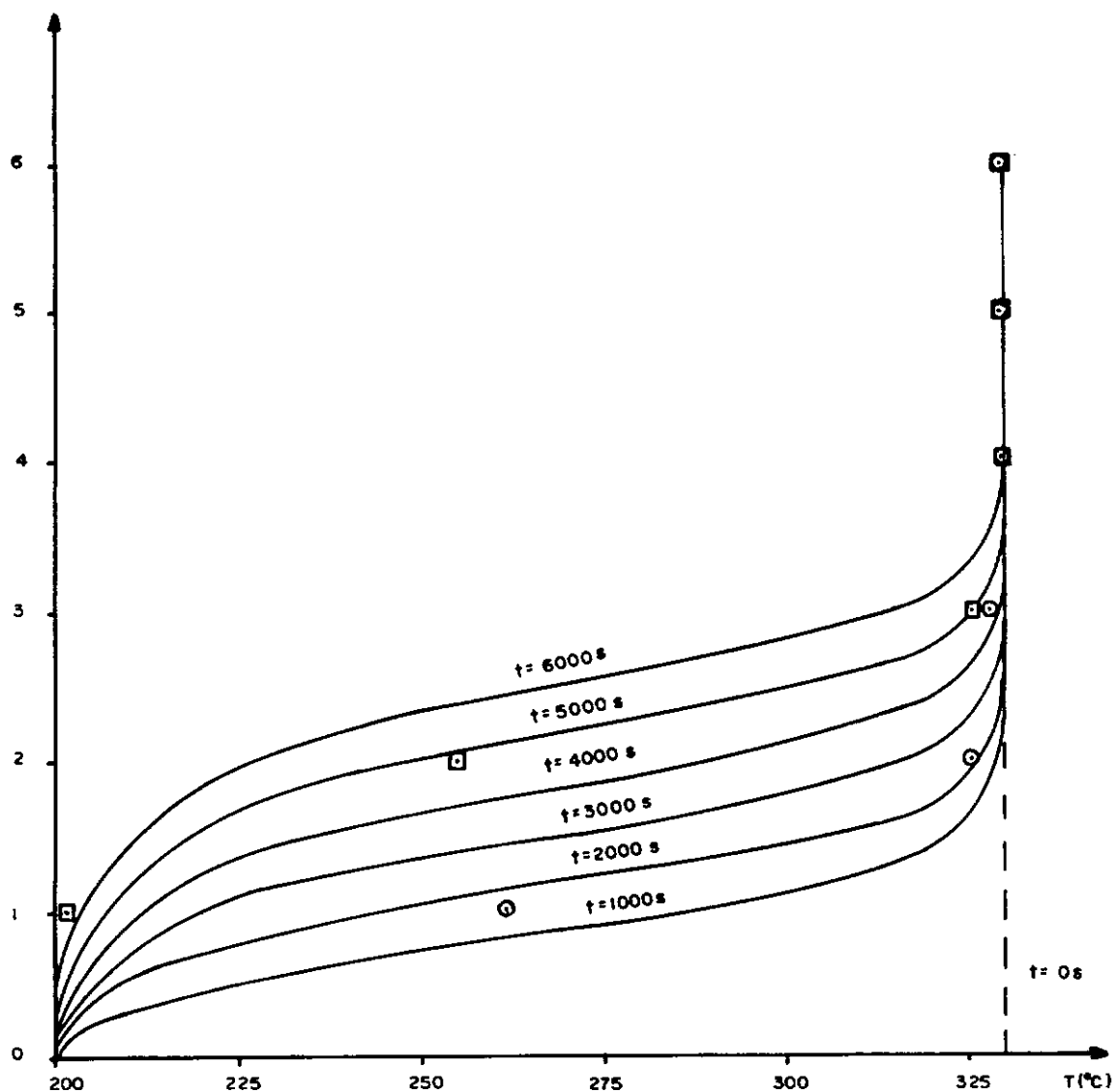


Figura V-8 Perfis de temperatura por solução numérica, na operação de descarga, considerando: o tanque carregado totalmente no instante inicial.

----- Perfil de temperatura inicial do fluido
 ———— Perfis de temperatura do fluido, por solução numérica

Dados experimentais : - $t = 1000\text{ s}$; - $t = 4000\text{ s}$
 Temperatura ambiente = $0,3^{\circ}\text{C}$; Vazão : $1,04\text{ Kg/s}$

das características físicas e geométricas do reservatório e do ambiente externo, nos perfis de temperatura na parede e no fluido térmico.

O Número de Nusselt equivalente caracteriza o efeito da energia dissipada através do isolante para o exterior figura (V-9), e da energia conduzida axialmente através da parede, figura (V-10), na operação de descarga.

Para alto Nu_{eq} , o gradiente de temperatura entre a parede interna e o fluido térmico na figura (V-9), é muito elevado no topo (região de fluido quente), onde ocorrem as maiores parcelas de perdas de calor e diminui no fundo do tanque (região de fluido frio), com menores perdas de calor, ou seja, a temperatura da parede é sempre menor que a temperatura do fluido e todo tanque perde calor (efeito condutivo).

Quando o Nu_{eq} é baixo, figura (V-10), o gradiente de temperatura entre o fluido e a parede é pequeno. Porém, este gradiente no fundo do reservatório é negativo (temperatura da parede maior que a temperatura do fluido), ou seja, a energia conduzida axialmente pela parede é maior que as perdas térmicas (efeito capacitivo). Isto mostra claramente um "curto circuito" entre o fluido quente e o fluido frio, por meio da parede do reservatório.

Para a operação de descarga é apresentada na figura (V-11), o comportamento da eficiência térmica, para o fluido homogêneo e estratificado termicamente no interior do reservatório, onde observa-se que:

- 1) A eficiência térmica tanto Primeira como Segunda Lei da Termodinâmica diminuem com o tempo.

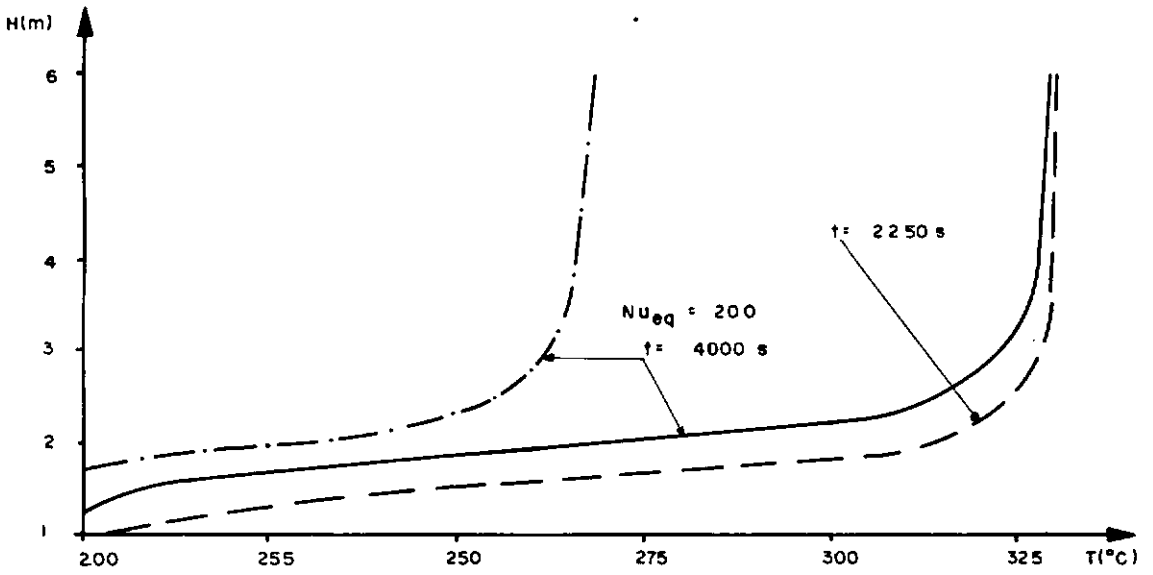


Figura V-9 – Influência do alto valor de Nu_{eq} nos perfis de temperatura do fluido e da parede interna do tanque na operação de descarga, por solução numérica.

----- Perfil inicial \equiv Perfil experimental $\equiv T_{\text{fluido}} \equiv T_{\text{parede}}$

—— Perfil de temperatura do fluido

----- Perfil de temperatura da parede

Temperatura ambiente = $0,3^{\circ}\text{C}$; Vazão = $1,04 \text{ Kg/s}$

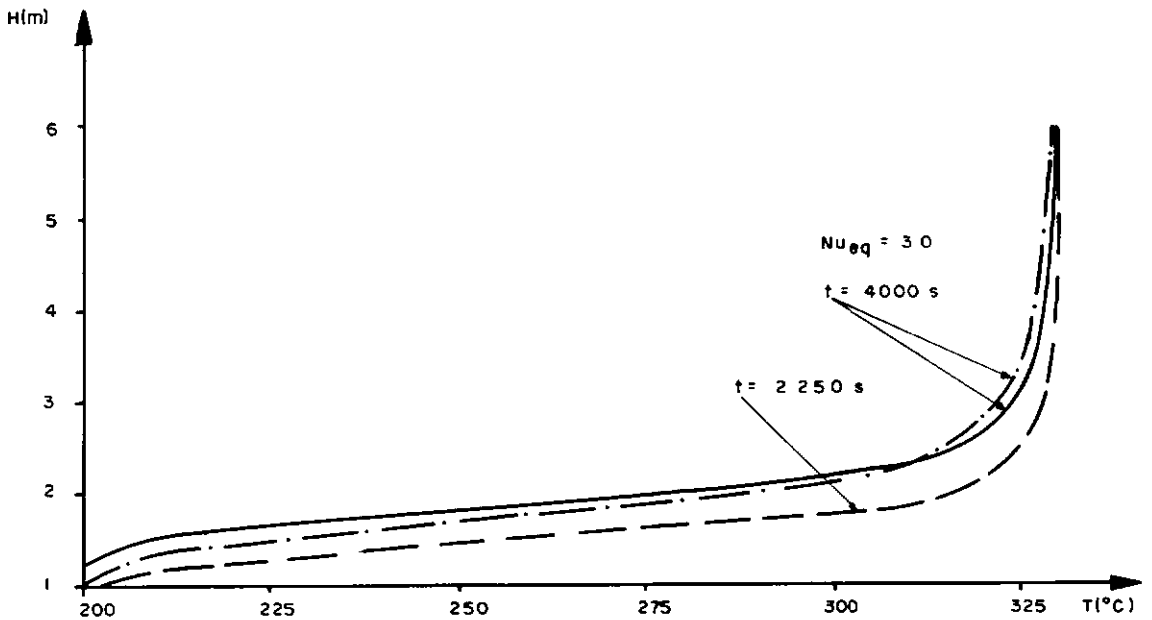


Figura V-10 – Influência do baixo valor de Nu_{eq} nos perfis de temperatura do fluido e da parede interna do tanque na operação de descarga por solução numérica.

----- Perfil inicial \equiv Perfil experimental $\equiv T_{\text{fluido}} \equiv T_{\text{parede}}$

—— Perfil de temperatura do fluido

----- Perfil de temperatura na parede

Temperatura ambiente = $0,3^{\circ}\text{C}$; Vazão = $1,04 \text{ Kg/s}$

- 2) Os perfis da eficiência pela Primeira Lei e Segunda Lei da Termodinâmica para o fluido estratificado se aproximam enquanto os perfis pela Segunda Lei da Termodinâmica se afastam, até o instante 4000 segundos.
- 3) A diferença entre as eficiências térmicas na descarga é maior que na carga pela Segunda Lei da Termodinâmica.

Nas figuras (V-5) e (V-11), pode-se observar, pela Segunda Lei da Termodinâmica, que quanto maior a estratificação térmica do fluido, maior o afastamento entre os perfis de temperatura do fluido estratificado e homogêneo; o que evidencia o uso do diafragma no interior dos reservatórios, separando as regiões quente e fria.

A figura (V-12), apresenta o estudo numérico realizado relacionando a queda da eficiência térmica com o aumento da relação altura-diâmetro do reservatório, pela Primeira e Segunda Lei da Termodinâmica para um fluido estratificado termicamente no interior do reservatório.

Segundo o estudo experimental com a operação de descarga feito por Lavan⁵, a eficiência térmica deveria aumentar com o aumento da relação altura-diâmetro (H/D). Na realidade, isto é válido para descargas rápidas do fluido, quando o calor perdido pelas paredes isolantes do reservatório poderia ser desprezado. Portanto, na descarga rápida, a parede isolante em torno do reservatório se torna desnecessária, reproduzindo as condições do estudo de Lavan⁵, o que caracteriza um elevado Número de Nusselt equivalente (Nu_{eq}). Porém nesta condição, para descarga lenta, a eficiência térmica realmente diminui, figura (V-12), pois as perdas térmicas são apreciáveis.

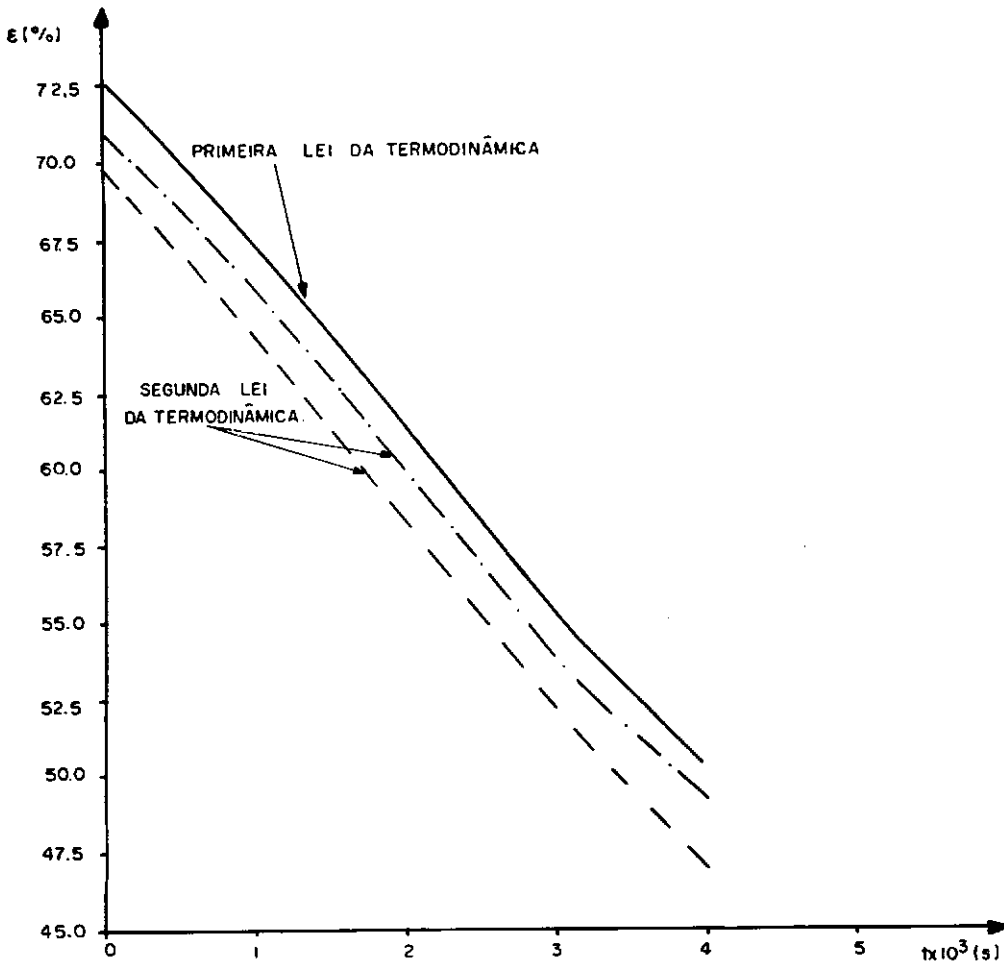


Figura V-11 - Eficiência térmica para o fluido no interior do tanque, durante a operação de descarga.

— Fluido homogêneo ou estratificado
 - - - Fluido estratificado
 - . - Fluido homogêneo
 Temperatura ambiente = $0,3^\circ\text{C}$; Vazão = $1,04 \text{ Kg/s}$

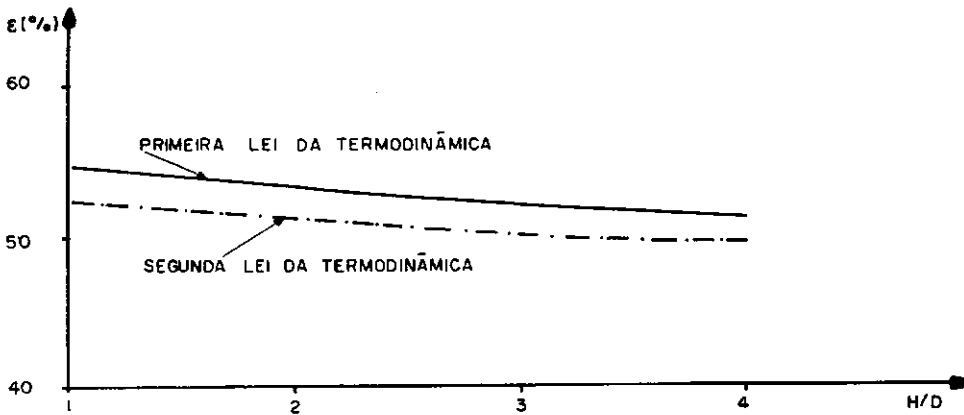


Figura V-12 - Influência da relação altura e diâmetro do tanque na eficiência térmica, durante a operação de descarga.

— Fluido homogêneo ou estratificado
 - - - Fluido estratificado
 Temperatura ambiente = $0,3^\circ\text{C}$; Vazão = $1,04 \text{ Kg/s}$

V.4 - Operação de Resfriamento

Os perfis de temperatura inicial, do fluido por solução numérica e os dados experimentais para três instantes de tempo 2, 6 e 10 horas são apresentados na figura (V-13), para a operação de resfriamento.

O erro máximo encontrado entre as temperaturas calculadas pela solução numérica e os dados experimentais é da ordem de 0.25%, para qualquer região do reservatório.

Observa-se que os pontos localizados na região de transição não se afastaram diferentemente dos outros pontos fora desta região, como ocorreu nas operações de carga e descarga. Isto é devido à inexistência da influência, nesta operação, de alguns dos fatores descritos na análise da figura (V-1a,b,c), pois:

- a) A frente quente (região intermediária), encontra-se estacionária nesta operação, fazendo com que o tempo de resposta dos termopares nesta região não interfira nos resultados obtidos.
- b) Inexistem zonas de misturas, ou seja, os difusores não interferem nesta operação.
- c) Uma vez que o gradiente de temperatura na região de transição é muito mais suave do que nas outras condições de operação, o espaçamento entre os termopares pode ser maior.

É observado na figura (V-13), que o fluido térmico, inicialmente estratificado, sofre uma homogeneização térmica com o passar do tempo, enquanto cede calor ao meio ambiente. Além disso, a homogeneização é mais rápida do que o

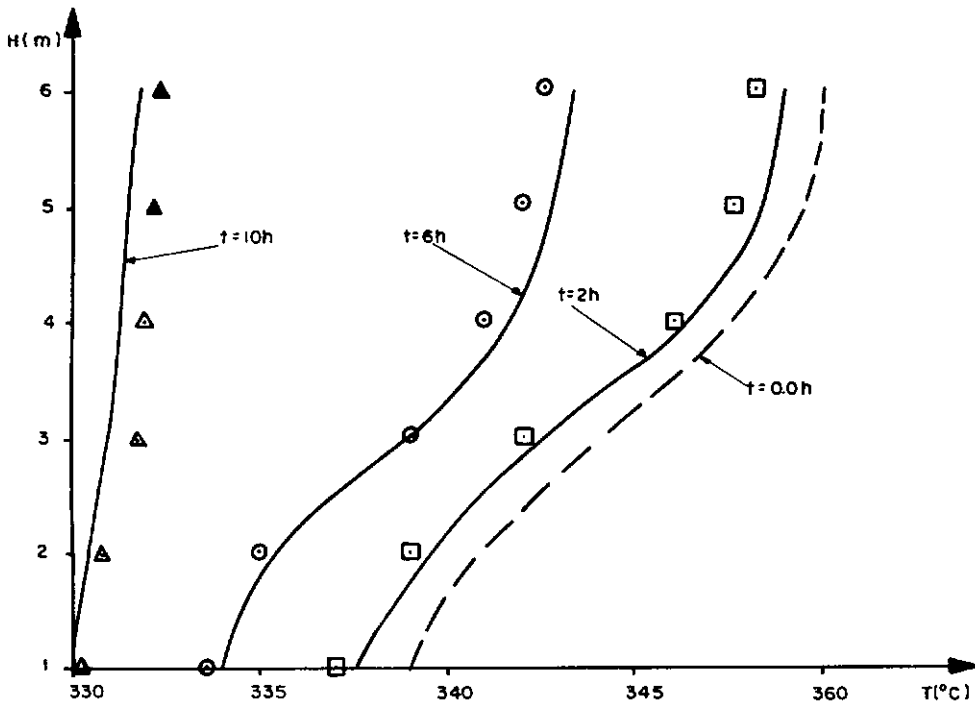


Figura V-13 — Perfis de temperatura do fluido no resfriamento

Temperatura ambiente = $0,3^{\circ}\text{C}$

Dados experimentais :

- Perfil de temperatura inicial \equiv Perfil de temperatura experimental
- Perfis de temperatura do fluido : solução numérica

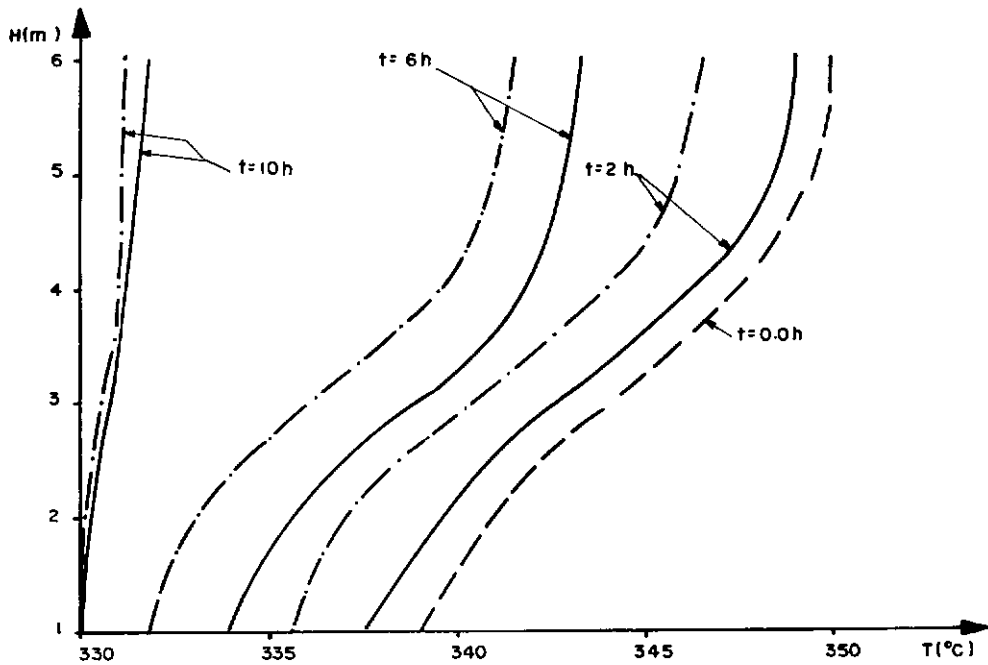


Figura V-14 — Perfis de temperatura do fluido e da parede interna no resfriamento.

- Perfil inicial \equiv Perfil experimental \equiv $T_{\text{fluido}} \equiv T_{\text{parede}}$
- T_{fluido} : solução numérica
- T_{parede} : solução numérica

resfriamento do fluido.

Na figura (V-14), são mostrados os perfis de temperatura inicial, do fluido e da parede interna do reservatório.

Nesta operação o gradiente de temperatura axial na parede é menor do que o apresentado na carga e descarga, figuras (V-3) e (V-7), amenizando os problemas de tensões térmicas nas paredes do reservatório.

Observa-se, após dez horas de resfriamento, que a estratificação térmica do fluido está prestes a desaparecer, ao mesmo tempo em que a temperatura da parede está próxima a temperatura do fluido.

É apresentado na figura (V-15), o estudo da influência do Número de Nusselt equivalente (Nu_{eq}), no resfriamento do fluido térmico, sendo que:

- 1) Para Nu_{eq} nulo, ocorreu efeito capacitivo e a perda de calor foi praticamente desprezível.
- 2) Para alto valor de Nusselt equivalente ($Nu_{eq} = 200$), observou-se um elevado gradiente de temperatura entre o fluido térmico e a parede interna, o que acelerou as perdas de calor para o ambiente.
- 3) Para $Nu_{eq} = 43,3$, representou-se as características do reservatório experimental, revelando-se este numa situação intermediária superior.

Na figura (V-16), são apresentados os perfis de eficiência térmica pela Primeira e Segunda Lei da Termodinâmica para o fluido estratificado e homogêneo no interior do reservatório, observando-se que a pouca estratificação do fluido,

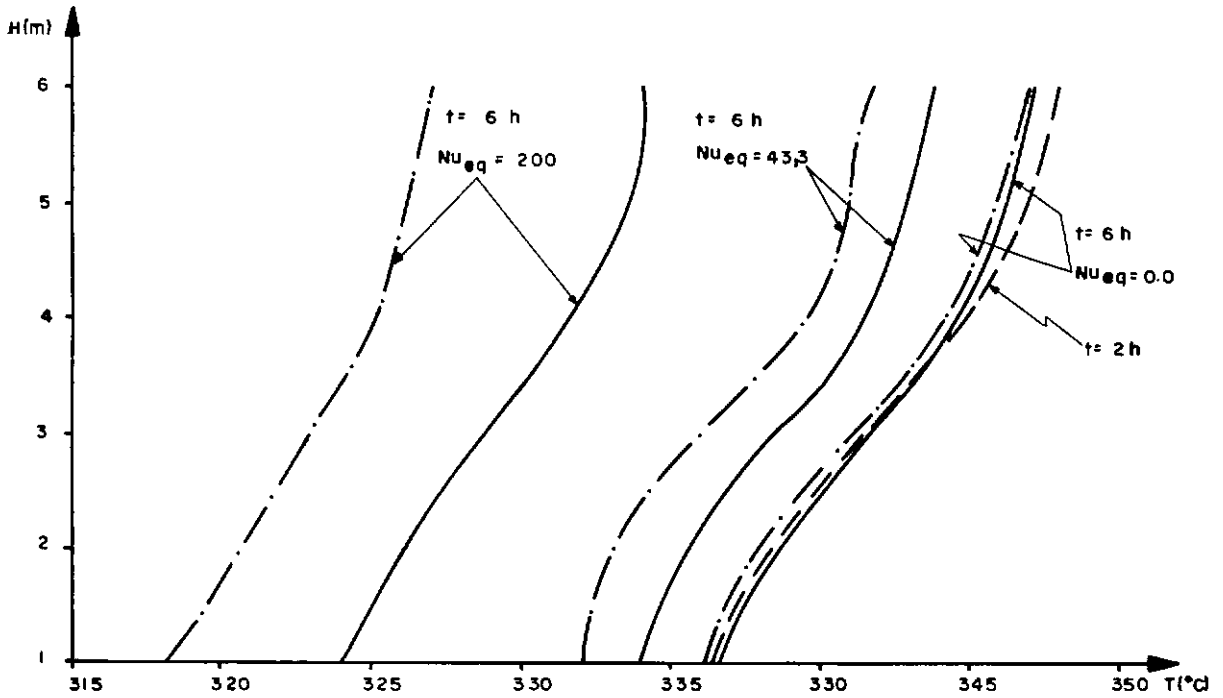


Figura V-15 - Influência do Nu_{eq} nos perfis de temperatura do fluido e da parede interna do tanque, no resfriamento.

- - - - Perfil inicial Ξ Perfil experimental Ξ $T_{fluido} \Xi T_{parede}$
 ——— T_{fluido} : Solução numérica
 - · - · - T_{parede} : Solução numérica

$Nu_{eq} = 43,3$: características do tanque ensaiado experimentalmente

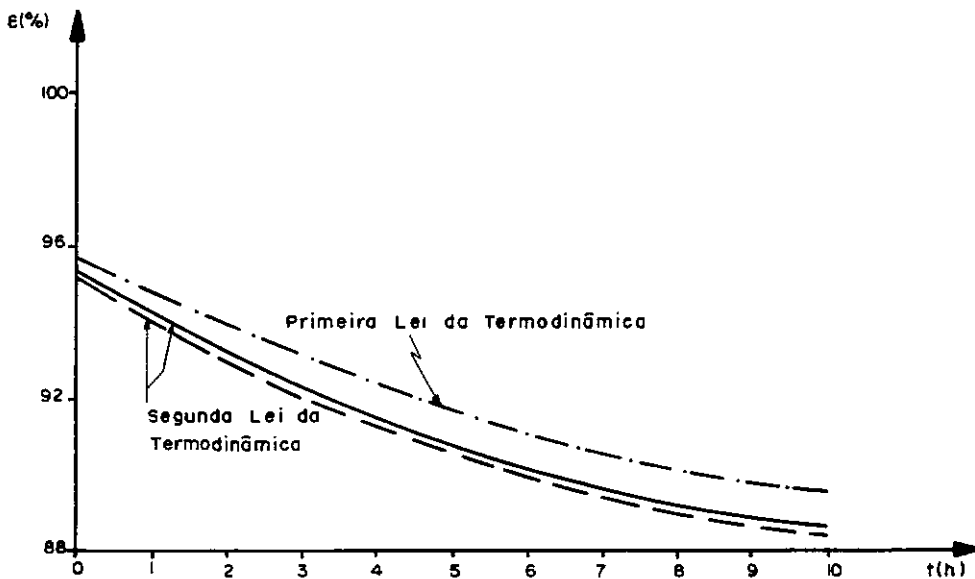


Figura V-16 - Eficiência térmica do tanque experimental para o fluido estratificado e homogêneo termicamente, no resfriamento.

- - - - $\epsilon_{homogêneo} \Xi \epsilon_{estratificado}$
 ——— $\epsilon_{estratificado}$
 - · - · - $\epsilon_{homogêneo}$

levou a uma diferença desprezível entre as eficiências pela Segunda Lei da Termodinâmica, para o fluido estratificado e homogêneo.

A figura (V-17), apresenta os perfis da eficiência térmica tanto pela Primeira como pela Segunda Lei da Termodinâmica, em função das características físicas e geométricas do sistema de estocagem (Nu_{eq}), após seis horas de resfriamento.

Observa-se que, para um dado intervalo de tempo de resfriamento, as eficiências diminuem para um aumento do Número de Nusselt equivalente. Isto é devido ao fato que as perdas de calor aumentam com o aumento de Nu_{eq} e portanto, o reservatório se resfria mais rapidamente com o tempo, para uma mesma condição inicial.

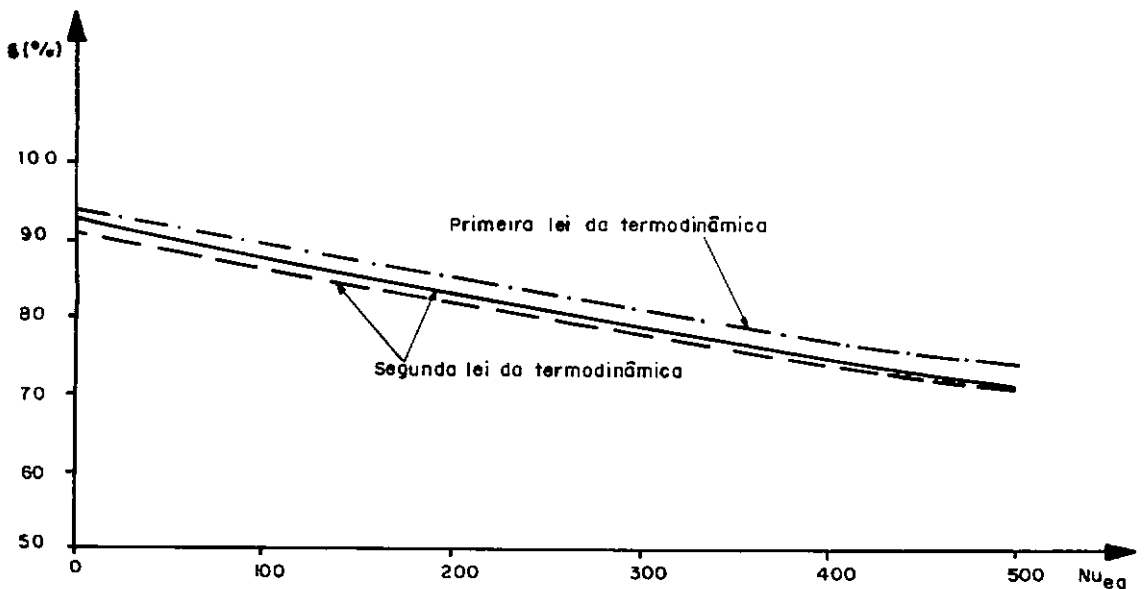


Figura V-17 - Influência do Nu_{eq} na eficiência térmica do tanque, após seis horas de resfriamento.

- $\epsilon_{homog\tilde{e}neo}$ e $\epsilon_{estratificado}$
- $\epsilon_{estratificado}$
- $\epsilon_{homog\tilde{e}neo}$

CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES

VI.1 - Validade do modelo e dos métodos de solução utilizados

Os resultados obtidos e expostos no capítulo anterior mostraram que, de um modo geral, o modelo proposto pode simular as condições de estocagem por estratificação em vaso, dentro de limitações que serão discutidas mais adiante, mas também, engloba todos os demais modelos da literatura, generalizando o problema da armazenagem de energia por calor sensível a estratificação de um fluido de trabalho.

As soluções analíticas desenvolvidas para as operações de carga e descarga, apresentam hipóteses mais restritivas. Os resultados obtidos, concordam com os de Cabelli⁴ e são mais gerais do que aqueles. Estes resultados tem a grande utilidade de, devido às disparidades com os dados experimentais, mostrar a importância das hipóteses e condições de contorno, na modelagem do problema físico.

Para a operação de resfriamento, não se procurou desenvolver uma solução analítica com hipóteses restritivas, como por exemplo, temperatura constante nas paredes, pois tais hipóteses, uma vez que os fenômenos de perdas de calor pelas paredes e consequente desenvolvimento de convecção livre interna tornam-se muito importantes, e levariam a um afastamento ainda maior da realidade.

VI.2 - Limitações do modelo

Tanto ao se procurar formular as hipóteses, quanto ao se buscar solução para um modelo proposto, incorre-se

em simplificações que irão naturalmente concorrer para um distanciamento de suas soluções com aquelas de resultados experimentais.

Dessa forma, ao se utilizar para a operação de resfriamento natural a correlação equação (III-9), se é obrigado a trazer para o modelo a restrição que o número de Grashof será maior do que 10^9 , ou seja, deve-se garantir valores adequadamente altos para o coeficiente da película na parede interna do reservatório. Já para as operações de carga e descarga, a correlação empírica, equação (III-8), limita o modelo a que o escoamento no interior do reservatório, apresente um número de Reynolds entre 10^4 e 10^5 , o que implica num regime laminar próximo da transição. Um dos significados mais importantes dessa restrição é que as turbulências que se desenvolvem nas entradas e saídas do reservatório, devem ser o mais rápida e eficientemente dissipadas. Este fato revela o enorme papel desempenhado pelos difusores num processo de armazenagem por estratificação.

No modelo proposto, a parede metálica do tanque foi considerada de espessura desprezível. Essa simplificação implica em que o tanque a que o modelo se refere, não trabalha com fluido altamente pressurizado. Sob essas novas condições, que obrigariam ao aumento da espessura da parede metálica, não apenas o gradiente de temperatura entre o fluido e o isolante se torna um parâmetro importante, mas também ocorre o fenômeno, já descrito em capítulo anterior, de que as camadas quente e fria do fluido no interior do reservatório, seriam como que curto-circuitadas pelo fluxo de calor axial na parede do tanque, o chamado efeito capacitivo, efeito de curto não desejado

quando se utilizara estratificação térmica.

VI.3 - Resultados e extensões imediatas

Em qualquer regime de operação, seja carga, descarga ou resfriamento, o aparecimento de tensões térmicas é inevitável, tanto na direção radial, pela aplicação de materiais diferenciados nas paredes, como na direção axial, devido ao violento gradiente de temperatura que se estabelece entre o topo e o fundo do reservatório.

Assim os perfis de temperatura apresentados pelo modelo não só revelam que as tensões térmicas obrigam a um projeto do tanque de armazenamento mais cuidadoso do que se poderia imaginar, mas também representam dados indispensáveis à própria determinação dos parâmetros estruturais de projeto.

Esses mesmos perfis podem, como já referido anteriormente, ser utilizados para a verificação da eficiência dos difusores empregados num projeto real, uma vez que o modelo é capaz de fornecer as curvas limite de estratificação para difusores idealmente eficientes tanto na entrada como na saída.

Por outro lado, se um dos objetivos principais da armazenagem é o de manter um alto nível de temperatura no topo do tanque pelo maior tempo possível, então poder-se-ia lançar mão do efeito capacitivo que ocorre para Nu_{eq} suficientemente baixos, usando-se espessuras diferenciadas do isolante na região do topo e no fundo do tanque.

VI.4 - Resultados e extensões futuras

Do que foi exposto anteriormente, pode-se claramente perceber que existem inúmeras possibilidades de desenvolvimento de aspectos que o modelo, tal como proposto, ou não consegue atingir ou deixa apenas entrever.

Evidentemente, a maior parte desses aspectos corresponde à eliminação de uma ou mais restrições que formam o corpo de hipóteses sob o qual o modelo está subjacente.

Por exemplo, ao eliminar-se as hipóteses de escoamento unidimensional, e parâmetros do fluido constantes, abre-se todo um campo para se introduzir fenômenos até agora não tratados, como a presença e o efeito real dos difusores no comportamento da estratificação, e os efeitos provocados pela variação da densidade do fluido no interior do tanque.

Por outro lado, mesmo com a formulação atual, existem aspectos que possibilitam um estudo mais detalhado como a obtenção de um projeto ótimo de um tanque de estocagem sob critérios econômicos, utilizando-se as curvas de eficiência termodinâmica, ou a pesquisa sistemática de fluidos de trabalho com parâmetros mais adequados e de menor custo.

Além disso, toda a importância do modelo se revela ao introduzi-lo na simulação de todo o ciclo energético, por exemplo do coletor a um sistema de conversão termo-elétrico, obtendo-se aí então dados e resultados mais confiáveis como base para anteprojetos de grande envergadura.

APÊNDICE A

O sistema de equações (III-1) a (III-5), será adimensionalizado, a partir das seguintes variáveis adimensionais:

$$\tau = \frac{\alpha t}{H^2}, \quad X = \frac{x}{H}, \quad U = \frac{H}{\alpha} u, \quad \theta = \frac{T - T_{\infty}}{\Delta T_0}, \quad \theta' = \frac{T' - T_{\infty}}{\Delta T_0}$$

o que resulta,

$$\rho' C'_p \frac{\Delta T_0}{H^2} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = K \frac{\Delta T_0}{H^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - \rho' C'_p \frac{\alpha}{H} U \frac{\Delta T_0}{H} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{4h}{D} \Delta T_0 (\theta - \theta')$$

$$0 \leq X \leq 1, \quad \tau > 0 \quad \text{A-1}$$

$$\rho' C'_p \frac{\Delta T_0}{H^2} \frac{\partial \theta'}{\partial \tau} = K' \frac{\Delta T_0}{H^2} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial X^2} - \frac{4h D}{D_e^2 - D^2} \Delta T_0 (\theta - \theta') - \frac{4 \Delta T_0 \theta'}{(D_e^2 - D^2) \left(\frac{\ln(D_e/D)}{2 K'} + \frac{1}{D_e h_{\infty}} \right)}$$

$$0 \leq X \leq 1, \quad \tau > 0 \quad \text{A-2}$$

Após algumas simplificações as equações (A-1) e (A-2), ficam reduzidas a:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - U \frac{\partial \theta}{\partial X} - 4B \text{Nu} (\theta - \theta') \quad \text{A-3}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \tau} = \frac{\xi}{W} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial X^2} + \xi C \text{Nu} (\theta - \theta') - \xi F \text{Nu}_{eq} \theta' \quad \text{A-4}$$

Enquanto as condições de contorno e inicial, (equações (III-3) a (III-5), tornam-se:

$$\frac{\partial \theta(X, \tau)}{\partial X} = \frac{\partial \theta'(X, \tau)}{\partial X} = 0, \quad X = 0, \quad \tau > 0 \quad \text{A-5}$$

$$\frac{\partial \theta(X, \tau)}{\partial X} = \frac{\partial \theta'(X, \tau)}{\partial X} = 0, \quad X = 1, \quad \tau > 0 \quad \text{A-6}$$

$$\theta(X, 0) = \theta'(X, 0) = \theta_0(X, 0), \quad 0 \leq X \leq 1 \quad \text{A-7}$$

onde:

$$B = H/D$$

$$C = 4DH/(D_e^2 - D^2)$$

$$F = 8H$$

$$K_{eq} = K/(D_e^2 - D^2)$$

$$Nu = hH/K$$

$$Nu_{eq} = K_{eq} H / (K(\ln(D_e/D) + 2K'/(D_e h_\infty)))$$

$$W = K/K'$$

$$\xi = \rho C_p / (\rho' C'_p)$$

APÊNDICE B

Método Implícito de Crank-Nicolson

Este método elimina a restrição de estabilidade e melhora a precisão da aproximação, devido ao uso de simetria na construção da equação diferença, levando a um erro de truncamento de segunda ordem ao passo que a aproximação pela diferença avançada ou atrasada implica num erro de truncamento de primeira ordem.

Considere a seguinte geometria, figura (B-1), a qual possui um centro de simetria no ponto $A(x, t+K/2)$, que não constitui um ponto da grade.

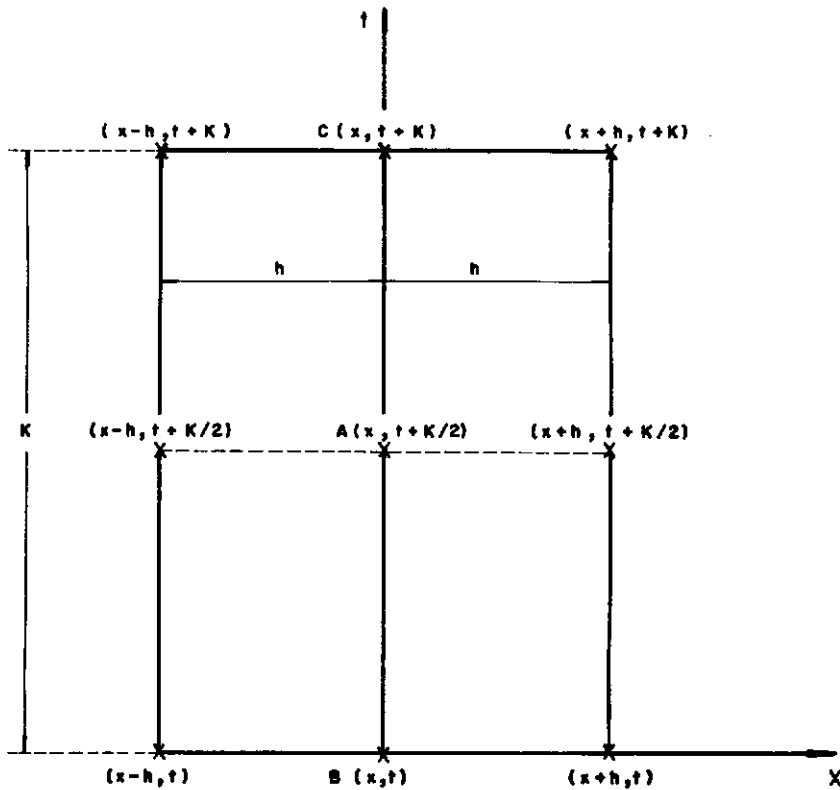


Figura (B-1) — Geometria da grade

As equações diferença a partir da geometria acima, com simetria no ponto A, para a variável temperatura $T(x, t)$, são obtidas como:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_A = \frac{T(x, t+K) - T(x, t)}{K}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_C = \frac{T(x+h, t+K) - T(x-h, t+K)}{2h}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_B = \frac{T(x+h, t) - T(x-h, t)}{2h}$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_B = \frac{T(x-h, t) - 2T(x, t) + T(x+h, t)}{h^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_C = \frac{T(x-h, t+K) - 2T(x, t+K) + T(x+h, t+K)}{h^2}$$

Tomando-se as derivadas da variável no ponto A, como a média aritmética das derivadas nos pontos B e C, pode-se escrever:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_A = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_B + \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_C \right)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_A = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_B + \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_C \right)$$

Além disso, o valor da variável no ponto "A" será tomado como:

$$T \Big|_A = \frac{1}{2} (T \Big|_B + T \Big|_C)$$

APÊNDICE C

O sistema de equações (III-15), (III-16) e (III-21) a (III-24) é apresentado a seguir segundo a sequência de distribuição dos pontos mostrados na figura (III-2).

Fluido

-

topo do tanque : $i = 1$

$$C_1 \theta_{i,M+1} + C_2 \theta_{i,M} + C_3 \theta_{i+1,M} + C_4 (\theta'_{i+N_p,M+1} + \theta'_{i+N_p,M}) = 0 \quad C-1$$

interior do tanque : $2 \leq i \leq N_p - 1$

$$C_5 \theta_{i,M+1} + C_6 \theta_{i,M} + C_7 \theta_{i-1,M+1} + C_8 \theta_{i+1,M+1} + C_7 \theta_{i-1,M} + C_8 \theta_{i+1,M} + C_4 (\theta'_{i+N_p,M+1} + \theta'_{i+N_p,M}) = 0 \quad C-2$$

fundo do tanque : $i = N_p$

$$C_1 \theta_{i,M+1} + C_2 \theta_{i,M} + C_3 \theta_{i-1,M} + C_4 (\theta'_{i+N_p,M+1} + \theta'_{i+N_p,M}) = 0 \quad C-3$$

Parede

topo do tanque : $i = N_p + 1$

$$C_9 \theta'_{i,M+1} + C_{10} \theta'_{i,M} + C_{11} \theta'_{i+1,M} + C_{12} (\theta_{i-N_p,M+1} + \theta_{i-N_p,M}) = 0$$

$$+ \theta_{i-N_p, M}) = 0 \quad \text{C-4}$$

interior do tanque : $N_p + 2 \leq i \leq 2N_p - 1$

$$\begin{aligned} & C_{13} \theta'_{i, M+1} + C_{14} \theta'_{i, M} + C_{15} (\theta'_{i-1, M+1} + \theta'_{i+1, M+1} + \\ & + \theta'_{i-1, M} + \theta'_{i+1, M}) + C_{12} (\theta_{i-N_p, M+1} + \theta_{i-N_p, M}) = 0 \end{aligned} \quad \text{C-5}$$

fundo do tanque na parede : $i = 2N_p$

$$\begin{aligned} & C_9 \theta'_{i, M+1} + C_{10} \theta'_{i, M} + C_{11} \theta'_{i-1, M} + C_{12} (\theta_{i-N_p, M+1} + \\ & + \theta_{i-N_p, M}) = 0 \end{aligned} \quad \text{C-6}$$

onde :

$$C_1 = \frac{1}{\Delta \tau} + 2 B Nu, \quad C_2 = -\frac{1}{\Delta \tau} + \frac{2}{\Delta x^2} + 2 B Nu,$$

$$C_3 = -\frac{2}{\Delta x^2}, \quad C_4 = -2 B Nu, \quad C_5 = \frac{1}{\Delta \tau} + \frac{1}{\Delta x^2} + 2 B Nu,$$

$$C_6 = -\frac{1}{\Delta \tau} + 2 B Nu + \frac{1}{\Delta x^2}, \quad C_7 = -\frac{1}{2\Delta x^2} - \frac{U}{4\Delta x},$$

$$C_8 = -\frac{1}{2\Delta x^2} + \frac{U}{4\Delta x}, \quad C_9 = \frac{1}{\Delta \tau} + \frac{\xi C}{2} Nu + \frac{F\xi}{2} Nu_{eq},$$

$$C_{10} = -\frac{1}{\Delta \tau} + \frac{\xi}{W} \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{\xi C}{2} Nu + \frac{F\xi}{2} Nu_{eq}, \quad C_{11} = -\frac{\xi}{W} \frac{2}{\Delta x^2},$$

$$C_{12} = -\frac{\xi C}{2} Nu \quad , \quad C_{13} = \frac{1}{\Delta \tau} + \frac{\xi}{W} \frac{1}{\Delta X^2} + \frac{\xi C}{2} Nu + \frac{F\xi}{2} Nu_{eq} \quad ,$$

$$C_{14} = -\frac{1}{\Delta \tau} + \frac{\xi}{W} \frac{1}{\Delta X^2} + \frac{\xi C}{2} Nu + \frac{F\xi}{2} Nu_{eq} \quad , \quad C_{15} = -\frac{\xi}{2W} \cdot \frac{1}{\Delta X^2}$$

Obtem-se um sistema de $2N_p$ equações lineares, representadas pelas equações (c-1) a (c-6), a $2N_p$ temperaturas desconhecidas,

$$\theta_{i,M+1} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots N_p \quad , \quad M \geq 0$$

$$\theta'_{i,M+1} \quad , \quad i = N_p+1, N_p+2, \dots 2N_p \quad , \quad M \geq 0$$

as quais podem ser denominadas por:

$$X_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \dots 2N_p$$

São conhecidas as temperaturas,

$$\theta_{i,M} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \dots N_p \quad , \quad M \geq 0$$

$$\theta'_{i,M} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \dots N_p \quad , \quad M \geq 0$$

As constantes C_i , $i = 1, 2, 3 \dots n$, bem como o produto destas pelas temperaturas conhecidas, serão denominadas pelas novas constantes:

$$a_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \dots n, n+1 \quad , \\ j = 1, 2, 3 \dots N_p$$

Substituindo-se as variáveis X_i e as constantes a_{ij} nas equações (C-1) a (C-6), obtem-se o sistema de equações lineares na seguinte forma geral:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 \dots a_{1n} X_{2N_p} = a_{1n+1}$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 \dots a_{2n} X_{2N_p} = a_{2n+1}$$

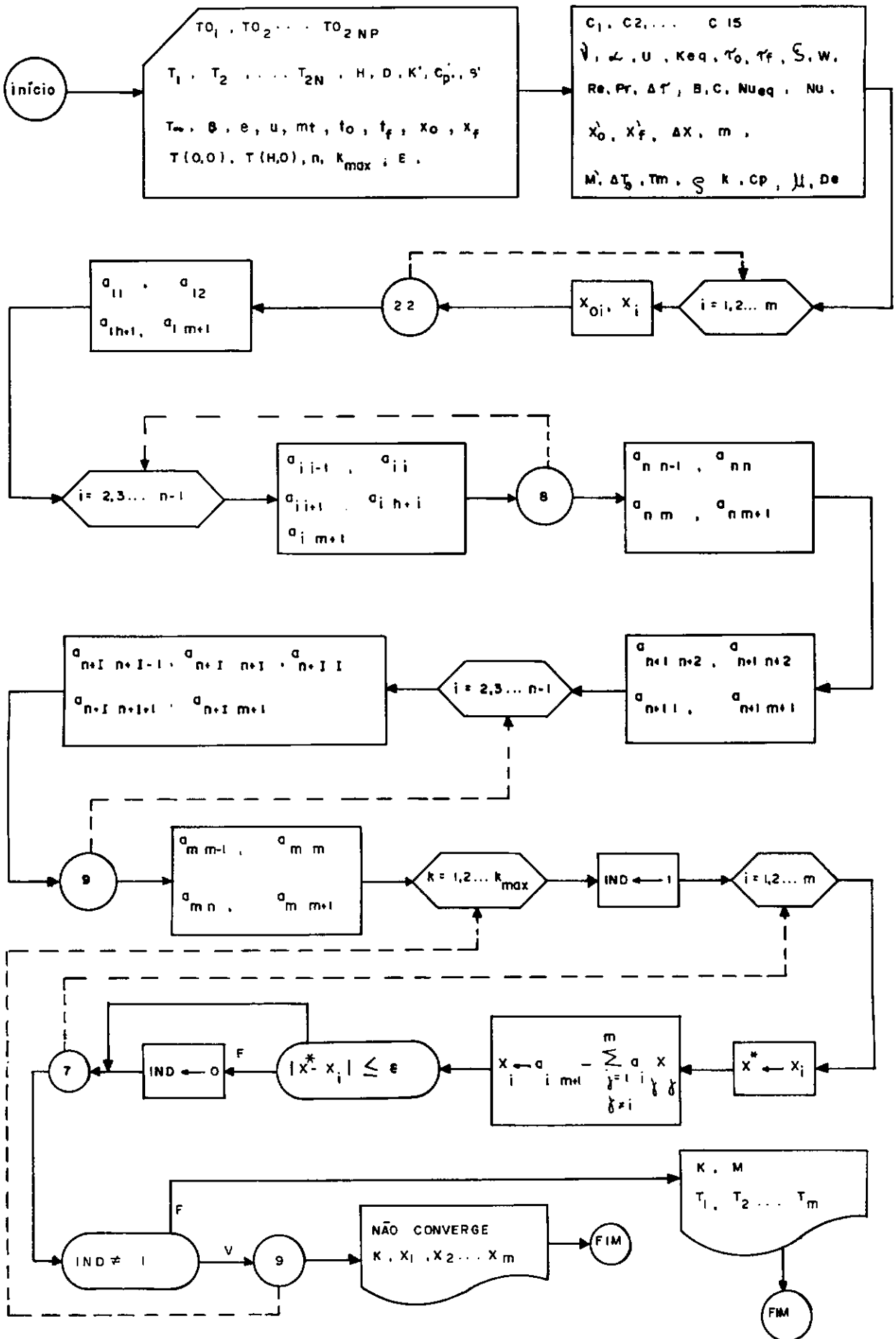
$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

C-7

$$a_{2n_p 1} X_1 + a_{2n_p 2} X_2 \dots a_{2n_p n} X_{2N_p} = a_{2n_p n+1}$$

A solução de um sistema de equações lineares como (C-7) obtido pelo método iterativo de Gauss-Seidel, é encontrada em Carnahan⁸. O diagrama de blocos e a listagem do programa correspondente são apresentados a seguir.

FLUXOGRAMA



```

*****
COMPILE TANHUE WITH FORTRAN; FORTRAN DATA
COMMON/CI/ A(30,30),X(30),M,ITMAX,EPS
REAL KF,KI,MI,NI,NUEN,KR,KRR,NU
DIMENSION TV(30),TC(30),XV(30),T(30)
READ(5,/) J,ITMAX,EPS
READ(5,/) (TV(I),I=1,2*N)
READ(5,/) (TC(I),I=1,2*N)
READ(5,/) H,C,E,OI,KI,CPI,TE,BETAF
READ(5,/) UD,MT,TETA0,TFAP,X00,XDP
READ(5,/) TFO0,TFH0
WRITE(6,*/) M,ITMAX,EPS,H,C,E,OI,KI,CPI,TE,BETAF,UD,MT,TETA0,TETA
1P,X00,XDP,(TV(I),I=1,2*N)
N=2*N
UFO=TFH0-TFO0
FM=(TFO0+TFH0)/2.
FO=(TFO0-TE)/OIF0
CF=1016.-0.703*FM
KF=0.1076-0.0000504*FM
CPF=(1412.+3.9*FM)/4184.
OI=(0.1/3600.)*EXP((724.5/(78.43+FM))-1.5242)
NI=MI/UF
ALFAF=KF/(CF-CPF)
U=UD*H/ALFAF
CILE=KI/E
TETA00=TETA0/3600.
TETA0P=TFAP/3600.
CSI=UF*CPF/(OI+CPI)
K=KF/KI
RE=ABS(CF-OI)/MI
PR=1/ALFAF
TAUAP=ALFAF*TETA0P/(H**2.)
TAU00=ALFAF*TETA00/(H**2.)
JTAUA=(TAUAP-TAU00)/(MI-1)
L=H/J
C=1/E
RUL0=C*UD*H/KF
NU=0.023*(KF**0.5)*(PR**0.4)
X0=X00/H
XAP=XDP/H
DXA=(XAP-X0)/(N+1)
WRITE(6,*/) JFO,FM,CF,KF,CPF,MI,NI,ALFAF,U,CSI,RE,PR,NU,(TC(I),I
=1,M),UFO,B,C
C=24 I=1.4
22 XV(I)=(TV(I)-TE)/TFO
C=25 I=1.4
23 X(I)=(TC(I)-TE)/TFO
C1=1./JTAUA+2.*3*NU
C2=-1./JTAUA+2./DXA**2.+2.*9*NU
C3=-2./XAP**2.
C4=-2.*3*NU
C5=1./JTAUA+1./DXA**2.+2.*6*NU
C6=-1./JTAUA+2.*3*(NU+1./DXA**2.
C7=-1./J(2.*DXA**2.)-J/(4.*DXA)
*****

```



```

C8=-1./(2.*DxA**2.)+U/(4.*DxA)
C9=1./JTAUA+QSI*(C+NU/2.+4.*H*QSI*NUFQ
C10=-1./JTAUA+2.*QSI/(W*DxA**2.)+QSI*(C+NU/2.+4.*H*QSI*NUFQ
C11=-2.*QSI/(W*DxA**2.)
C12=-QSI*(C+NU/2.
C13=1./JTAUA+QSI/(W*DxA**2.)+QSI*(C+NU/2.+4.*H*QSI*NUFQ
C14=-1./JTAUA+QSI/(W*DxA**2.)+QSI*(C+NU/2.+4.*H*QSI*NUFQ
C15=-QSI/(2.*W*DxA**2.)
I=1
A(I,1)=C1
A(I,N+1)=C4
A(I,2*N+1)=-C2*XV(I)-C3*XV(I+1)-C4*XV(N+1)
DO 3 I=2,N-1
  A(I,I-1)=C7
  A(I,I)=C5
  A(I,I+1)=C3
  A(I,N+I)=C4
3  A(I,2*N+1)=-C7*XV(I-1)-C5*XV(I)-C3*XV(I+1)-C4*XV(N+1)
  I=N
  A(I,I)=C1
  A(I,N+1)=C4
  A(I,2*N+1)=-C3*XV(I-1)-C2*XV(I)-C4*XV(N+1)
  I=1
  A(N+I,N+I)=C9
  A(N+I,1)=C12
  A(N+I,2*N+1)=-C12*XV(I)-C10*XV(N+1)-C11*XV(N+I+1)
  DO 9 I=2,N-1
    A(N+I,N+I-1)=C15
    A(N+I,N+I)=C13
    A(N+I,N+I+1)=C15
    A(N+I,1)=C12
9  A(N+I,2*N+1)=-C15*XV(N+I-1)-C14*XV(N+I)-C15*XV(N+I+1)-C12*XV(I)
  I=N
  A(N+I,N+I)=C9
  A(N+I,1)=C12
  A(N+I,2*N+1)=-C11*XV(N+I-1)-C10*XV(N+I)-C12*XV(I)
  CALL GSCCM
  DO 14 I=1,N
14  F(I)=TR+X(I)*CFRQ
    WRITE(6,201) I,TR,M,C(I),I=1,N)
201  FORMAT(//," CONVERGENCIA SEM SUCESSOJA "//, " ITERACAO = ",I3//," X(1),
1....,X(",I2,")"//,3(SF19.7))
    DO 800 I=1,M
      ZFI=X(I)-XV(I)
      XV(I)=X(I)
600  X(I)=XV(I)+ZFI
1000  CONTINUE
      CALL EXIT
      STOP
      SUBROUTINE GSCCM
      CM=CM/CFI/ A(30,30),X(30),N,ITMAX,EP5
      *PI=N+1
      DO 3 I=1,N

```

```

*****
      ASTAR=A(I,I)
      GO 3 J=1,NP1
3     A(I,J)=A(I,J)/ASTAR
      GO 9 IF I=1,IMAX
      FLAG=1
      GO 7 I=1,N
      XSTAR=X(I)
      X(I)=A(I,NP1)
      GO 5 J=1,N
      IF(I.EQ.J) GO TO 5
      X(I)=X(I)-A(I,J)*X(J)
5     CONTINUE
      IF(ABS(XSTAR-X(I)).LE.EPS) GO TO 7
      FLAG=0
7     CONTINUE
      IF(FLAG.NE.1) GO TO 9
      WRITE(J,203) ITER,(X(I),I=1,N)
203  FORMAT(" C PRICI)IMPOT( CONVERGIO, NA ITER=" ,I4/" VETOR SOLUCAO X
      1(1)...X(N)"/(1H0,10F13.4))
      GO TO 205
9     CONTINUE
      WRITE(J,204) ITER,(X(I),I=1,N)
204  FORMAT(" NA) CONVERGE"/" ITER= , I4"/" VETOR ATUAL X(1)...X(N)"/(1
      1H0,10F13.4))
205  RETURN
      END
*****

```

APÊNDICE D

O sistema de equações (III-27) a (III-32) é apresentado a seguir segundo a sequência de distribuição dos pontos mostrados na figura (III-2).

Fluido

topo do tanque : $i = 1$

$$f_t = D_1 \theta_{i,M+1} + D_2 \theta_{i,M} + D_3 \theta_{i+1,M} + D_4 (\theta_{i,M+1} + \theta_{i,M} - \theta'_{i+N_p,M+1} - \theta'_{i+N_p,M})^{4/3} = 0 \quad D-1$$

interior do tanque : $2 \leq i \leq N_p - 1$

$$f_i = D_5 \theta_{i,M+1} + D_6 \theta_{i,M} + D_7 (\theta_{i-1,M+1} + \theta_{i+1,M+1} + \theta_{i-1,M} + \theta_{i+1,M}) + D_4 (\theta_{i,M+1} + \theta_{i,M} - \theta'_{i+N_p,M+1} - \theta'_{i+N_p,M})^{4/3} = 0 \quad D-2$$

fundo do tanque : $i = N_p$

$$f_f = D_1 \theta_{i,M+1} + D_2 \theta_{i,M} + D_3 \theta_{i-1,M} + D_4 (\theta_{i,M+1} + \theta_{i,M} - \theta'_{i+N_p,M+1} - \theta'_{i+N_p,M})^{4/3} = 0 \quad D-3$$

Parade

topo do tanque : $i = N_p + 1$

$$f'_t = D_8 \theta'_{i,M+1} + D_9 \theta'_{i,M} + D_{10} \theta'_{i+1,M} + D_{11} (\theta_{i-N_p,M+1} + \theta_{i-N_p,M} - \theta'_{i,M+1} - \theta'_{i,M})^{4/3} = 0 \quad D-4$$

interior do tanque : $N_p + 2 \leq i \leq 2N_p - 1$

$$f'_i = D_{12} \theta'_{i,M+1} + D_{13} \theta'_{i,M} + D_{14} (\theta'_{i-1,M+1} + \theta'_{i+1,M+1} + \theta'_{i-1,M} + \theta'_{i+1,M}) + D_{11} (\theta_{i-N_p,M+1} + \theta_{i-N_p,M} - \theta'_{i,M+1} - \theta'_{i,M})^{4/3} = 0 \quad D-5$$

fundo do tanque : $i = 2N_p$

$$f'_f = D_8 \theta'_{i,M+1} + D_9 \theta'_{i,M} + D_{10} \theta'_{i-1,M} + D_{11} (\theta_{i-N_p,M+1} + \theta_{i-N_p,M} - \theta'_{i,M+1} - \theta'_{i,M})^{4/3} = 0 \quad D-6$$

onde:

$$D_1 = \frac{1}{\Delta\tau} \quad , \quad D_2 = -\frac{1}{\Delta\tau} + \frac{2}{\Delta X^2} \quad , \quad D_3 = -\frac{2}{\Delta X^2} \quad , \quad D_4 = \frac{\sigma 1}{2^{4/3}} \quad ,$$

$$D_5 = \frac{1}{\Delta\tau} + \frac{1}{\Delta X^2} \quad , \quad D_6 = -\frac{1}{\Delta\tau} + \frac{1}{\Delta X^2} \quad , \quad D_7 = -\frac{1}{2\Delta X^2} \quad ,$$

$$D_8 = \frac{1}{\Delta\tau} + \frac{F\xi}{2} Nu_{eq} \quad , \quad D_9 = -\frac{1}{\Delta\tau} + \frac{\xi}{W} \frac{2}{\Delta X^2} + \frac{\xi F}{2} Nu_{eq} \quad ,$$

$$D_{10} = -\frac{\xi}{W} \frac{2}{\Delta X^2} \quad , \quad D_{11} = -\frac{\sigma 2}{2^{4/3}} \quad , \quad D_{12} = \frac{1}{\Delta\tau} + \frac{\xi}{W\Delta X^2} + \frac{\xi F}{2} Nu_{eq} \quad ,$$

$$D_{13} = -\frac{1}{\Delta\tau} + \frac{\xi}{W\Delta X^2} + \frac{\xi F}{2} Nu_{eq} \quad , \quad D_{14} = -\frac{\xi}{2W\Delta X^2}$$

Seguindo-se a mesma sequência apresentada no Apêndice (C), ou seja:

Tomando o sistema constituído pelas $2N_p$ equações não lineares (D-1) a (D-6), a $2N_p$ temperaturas desconhecidas ($\theta_{i,M+1}$ e $\theta'_{i,M+1}$) denominadas por X_i ; as temperaturas conhecidas ($\theta_{i,M}$ e $\theta'_{i,M}$) as constantes D_i e o produto destas pelas temperaturas conhecidas como sendo a_i , obtém-se o sistema na seguinte forma:

$$f_1 (X_1, X_2, \dots, X_{2N_p}) = 0$$

$$f_2 (X_1, X_2, \dots, X_{2N_p}) = 0$$

D-7

.

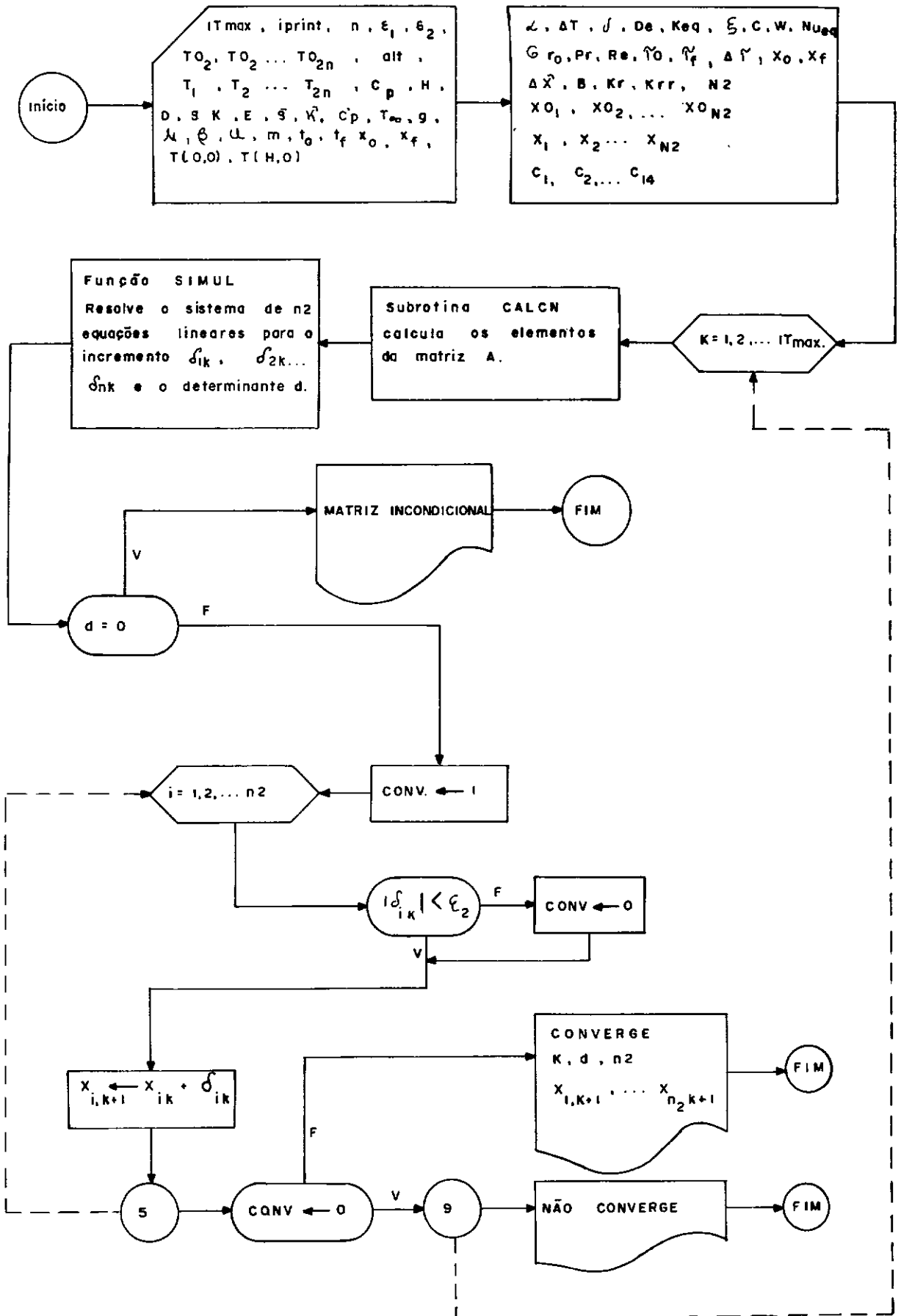
.

.

$$f_{2N_p} (X_1, X_2, \dots, X_{2N_p}) = 0$$

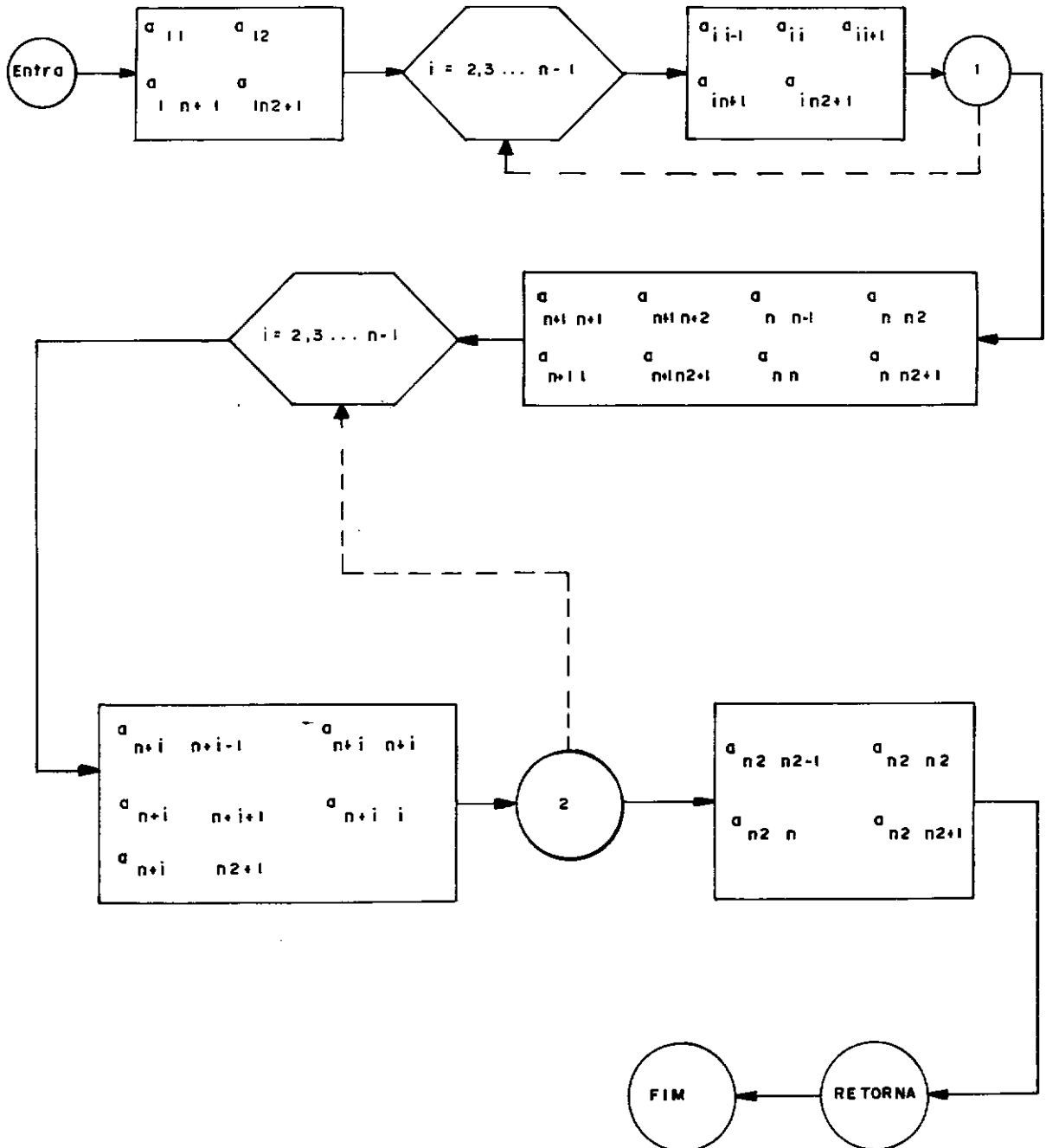
A solução do sistema de equações não lineares como (D-7), obtido pelo método iterativo de Newton-Raphson, é encontrado em Carnahan⁸. O diagrama de blocos e a listagem do programa correspondente são apresentados a seguir.

FLUXOGRAMA DO PANORAMA PRINCIPAL

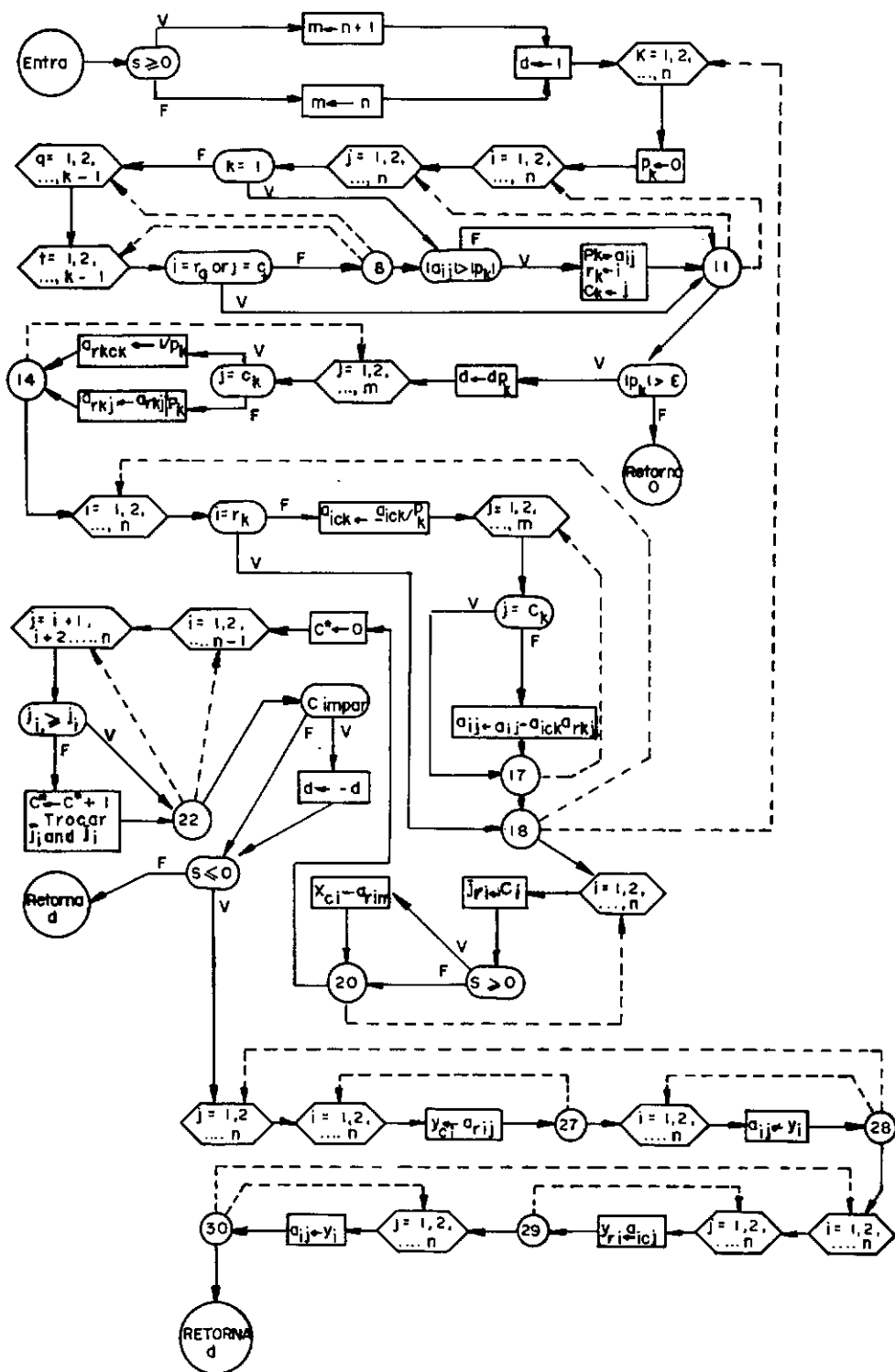


SUBROTINA CALC N

Argumentos (A, X, N)



FLUXOGRAMA DA FUNÇÃO SIMUL

Argumentos : h, A, X, ϵ, S 

COMPILE TANQUE WITH FORTRAN, FORTRAN DATA

```

      COMMON/COMMON1/C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,C9,C10,C11,C12,C13,C14
      COMMON/COMMON2/C11(30),C12(30),C13(30),C14(30),C15(30)
      DIMENSION X(40),XV(40),XINC(40),A(40,41),T(40),TV(40),TC(40),EFI(4
10)
      REAL KF,KI,MIF,NIF,NUEQ,KR,KRR,NU
      DO 17 I=1,1
      READ(5,/) IFMAX,IPRINT,N,EPS1,EPS2,ALF,(TC(I),I=1,2*N)
      N2=2*N
      READ(5,/) CPF,H,O,OF,KF,E,OI,KI,CPI,TE,GRAV,MIF,BETAF
      READ(5,/) UD,M,TETA0,TETAP,XD0,XDP,TF00,TFH0,TMIN,(TV(I),I=1,N2)
      IF(3,0,0) WRITE(6,5)
5  FORMAT("  C O M P I L E F O R T R A N  T A N Q U E ")
      DO 11 I=1
      WRITE(6,6)
6  FORMAT("V E R I F I C A T I O N P S O A D I S T O (N1, 00")
7  WRITE(6,7) IFMAX,IPRINT,N,EPS1,EPS2,M,(TV(I),I=1,N2),UD,TF00,TFH0
1,CPF,H,O,OF,KF,E,OI,KI,CPI,TE,GRAV,MIF,BETAF,TETA0,TETAP,XD0,XDP,A
21,N2
      WRITE(6,8) (TC(I),I=1,N2)
      ALFAF=KF/(OF*CPF)
      LTF0=(TF00-TEH0)
      NIF=MIF/OF
      HAL=E+J/2.
      CTEQ=KI/E
      TETA00=TETA0/3600.
      TETA0P=TETAP/3600.
      OSI=OF*CPF/(OI*CPI)
      C=H/E
      W=KF/KI
      NUEQ=C+K*H/KF
      GR0=GRAV+BETAF*OTF0+ALF**3./(NIF**2.)
      FR=NIF/ALFAF
      RE=ABS(OF*UD+H)/MIF
      TAUAP=ALFAF*(TETAP)/(H**2.)
      TAU0=ALFAF*(TETA0)/(H**2.)
      DTAUA=(TAUAP-TAU0)/(M-1)
      X0=XD0/H
      XAP=XDP/H
      B=H/J
      OXA=(XAP-X0)/(M+1)
      WRITE(6,9) NIF,GR0,PR,OXA,DTAUA,OTF0,RAE,CTEQ,NUEQ,B,C
      KR=DTAUA/(OXA+OXA)
      KRA=DTAUA/OXA
      C1=KR/2.
      C2=KR
      C3=K/2.
      C4=0.52*(1./(2.**(4./3.)))*DTAUA*B*((GR0*PR)**(1./3.))
      C5=1.-KR
      C6=KR/2.
      C7=KR/2.
      C8=OSI*KR/(2.*W)
      C9=OSI*KR/W+C8*DTAUA*L*NUEQ/2.

```

```

C10=JSI*KX/(2.*W)
C11=JSI*KW/(2.*W)
C12=1.-D*I*KX/W-JSI*DTAUA*(C*NUEW/2.
C13=J.17*(1./2.*(4./3.))*C+JSI*DTAUA*(GR0*PR)+*(1./3.)
C14=DTAUA*JSI*C*NUEW/2.
DO 22 I=1,N2
22 XV(I)=(TV(I)-TE)/DTFO
DO 23 I=1,N2
23 X(I)=(TC(I)-TE)/DTFO
DO 24 EIA=1,N-1
I=1
CT4(I)=XV(I)
CT2(I)=XV(I)-XV(I+I)
CT5(I)=(1.-C15)*XV(N+I)
DO 9 I=2,N-1
CT1(I)=C5*XV(I)+C6*XV(I+1)+C7*XV(I-1)
CT2(I)=XV(I)-XV(N+I)
9 C13(I)=C11*XV(N+I-1)+C12*XV(N+I)+C11*XV(N+I+1)
I=N
CT4(I)=XV(I)
CT2(I)=XV(I)-XV(N+I)
CT5(I)=(1.-C15)*XV(N+I)
DO 17 ITER=1,IMAX
CALL CALCON(A,X,N)
DETER=FMUL(A,XINC,N2,EPS1,INDICE)
IF(DETER.NE.0.) GO TO 11
WRITE(6,10)
10 FORMAT(/," A MATRIZ ESTA MAL CONDICIONADA OU SINGULAR")
GO TO 19
11 ITER=1
DO 12 I=1,N2
IF(ABS(XINC(I)).GT.EPS2) ITER=0
12 X(I)=X(I)+XINC(I)
IF(ITER.EQ.1) WRITE(6,13) ITER,DETER,N2,(X(I),I=1,N2)
13 FORMAT(/," ITERACAO = ",I3/, " DETERMINANTE = ",E14.7/, " X(1),...,X",
14(I2,"")"/,8(5E18.7/))
IF(ITER.EQ.0) GO TO 17
DO 14 I=1,N2
14 TC(I)=TE+X(I)*DTFO
WRITE(6,15) ITER,N2,(TC(I),I=1,N2)
15 FORMAT(/," CONVERGENCIA SEM SUCESSO"/, " ITERACAO = ",I3/, " X(1),...,X",
16(I2,"")"/,8(5E18.7/))
GO TO 20
17 CONTINUE
WRITE(6,18)
18 FORMAT(/," NAO CONVERGE")
GO TO 19
20 DO 25 I=1,N2
ZET=XV(I)-X(I)
XV(I)=X(I)
25 X(I)=X(I)-ZET
24 CONTINUE
19 CONTINUE

```

```

CALL EXIT
END
SUBROUTINE CALCUL(A,X,N)
COMMON/COMMON1/C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,C9,C10,C11,C12,C13,C14
COMMON/COMMON2/C11(30),C12(30),C13(30),C14(30),C15(30)
DIMENSION A(40,41),X(40)
I=1
PU=X(I)-X(N+I)+C12(I)
IF(PU.GE.0) GO TO 9
PU=ABS(PU)
RU=-1.
GO TO 19
9 RU=1.
19 A(I,I)=-((1.+2.*C2)-4.*C4*RU*(PU**((1./3.)))/3.
A(I,I+1)=2.*C2
A(I,N+I)=4.*C4*RU*(PU**((1./3.)))/3.
A(I,2*N+1)=-2.*C2*X(I+1)+(1+2.*C2)*X(I)+C4*RU*(PU**((4./3.)))-C14(I)
GO TO 1 I=2,N-1
PU=X(I)-X(I+I)+C12(I)
IF(PU.GE.0) GO TO 20
PU=ABS(PU)
RU=-1.
GO TO 20
20 RU=1.
29 A(I,I-1)=C1
A(I,I)=-((1.+C2)-4.*C4*RU*(PU**((1./3.)))/3.
A(I,I+1)=C3
A(I,N+I)=4.*C4*PU*(PU**((1./3.)))/3.
1 A(I,2*N+1)=-((1*X(I-1)+(1.+C2)*X(I)-C3*X(I+1)+C4*RU*(PU**((4./3.)))-C
11(I)
I=1
PU=X(I)-X(I+I)+C12(I)
IF(PU.GE.0) GO TO 30
PU=ABS(PU)
RU=-1.
GO TO 30
30 RU=1.
49 A(I,I-1)=-2.*C2
A(I,I)=-((1.-2.*C2)-4.*C4*RU*(PU**((1./3.)))/3.
A(I,I+I)=4.*C4*PU*(PU**((1./3.)))/3.
A(I,2*N+1)=+2.*((2*X(I-1)+(1-2.*C2)*X(I)+C4*RU*(PU**((4./3.)))-C14(I)
I=1
PU=X(I)-X(I+I)+C12(I)
IF(PU.GE.0) GO TO 50
PU=ABS(PU)
RU=-1.
GO TO 50
50 RU=1.
69 A(N+I,N+I)=-((1.+4.*C3+C15)-4.*C13*RU*(PU**((1./3.)))/3.
A(N+I,N+I+1)=4.*C3
A(N+I,I)=4.*C13*RU*(PU**((1./3.)))/3.
A(N+I,2*N+1)=(1.+4.*C3+C15)*X(N+I)-4.*C8*X(N+I+1)-C13*RU*(PU**((4./
13.)))-C15(I)

```

```

      2  I=2,N-1
      PU=X(I)-X(N+I)+C12(I)
      IF(PU.GE.0) GO TO 79
      PU=ABS(PU)
      RU=-1.
      GO TO 39
39  PU=1.
      A(N+I,N+I-1)=C8
      A(N+I,I+I)=-(1.+C9)-4.*C13*PU*(PU**(.1/3.))/3.
      A(N+I,N+I+1)=C10
      A(N+I,I)=4.*C13*RU*(PU**(.1/3.))/3.
2   A(N+I,2-N+1)=-C8*X(N+I-1)+(1.+C9)*X(N+I)-C10*X(N+I+1)-C13*RU*(PU**
1  (4./3.))-C13(I)
      I=1
      PU=X(I)-X(N+I)+C12(I)
      IF(PU.GE.0) GO TO 93
      PU=ABS(PU)
      RU=-1.
      GO TO 99
93  PU=1.
39  A(N+I,N+I-1)=-4.*C8
      A(N+I,N+I)=-(1.-4.*C8+C15)-4.*C13*RU*(PU**(.1/3.))/3.
      A(N+I,I)=4.*C13*RU*(PU**(.1/3.))/3.
      A(N+I,2-N+1)=(1.-4.*C8+C15)*X(N+I)+4.*C8*X(N+I-1)-C13*RU*(PU**(.4./
13.))-C15(I)
      RETURN
      END
FUNCTION SIMUL(A,X,N,EPS,INDICE)
      DIMENSION IRW(40),JCOL(40),JROW(40),Y(40),A(40,41),X(40)
      MAX=0
      IF(INDICE.GE.0) MAX=N+1
      IF(1.LE.40) GO TO 5
      WRITE(6,200)
200  FORMAT(10HON TOO BIG)
      SINGL=0.
      RETURN
5   CETER=1.
      JC 13 K=1,N
      KM1=K-1
      PIVC1=0.
      LC 11 I=1,N
      JC 11 J=1,N
      IF(1.EQ.1) GO TO 9
      JC 3 ISCAN=1,KM1
      JC 3 JSCAN=1,KM1
      IF(1.EV.1E-6*(ISCAN)) GO TO 11
      IF(3.EV.1E-6*(JSCAN)) GO TO 11
9   CONTINUE
9   IF(ABS(C(I,J)).LE.ABS(PIVC1)) GO TO 11
      PIVC1=A(I,J)
      IRW(K)=I
      JCOL(K)=J
11  CONTINUE

```

```

IF(ABS(PIVOT).GT.EPS) GO TO 13
SIMUL=0.
RETURN
17 IRDWK=IRDW(K)
JCOLK=JCOL(K)
DETER=DETER*PIVOT
DO 14 J=1,MAX
14 A(IRDWK,J)=A(IRDWK,J)/PIVOT
A(IRDWK,JCOLK)=1./PIVOT
DO 15 I=1,N
AIJCK=A(I,JCOLK)
IF(I.EQ.IRDWK) GO TO 16
A(I,JCOLK)=-AIJCK/PIVOT
DO 17 J=1,MAX
17 IF(J.NE.JCOLK) A(I,J)=A(I,J)-AIJCK*A(IRDWK,J)
18 CONTINUE
DO 20 I=1,N
IRDWI=IRDW(I)
JCOLI=JCOL(I)
JCR(I(ROWI))=JCOLI
20 IF(I.NE.ROWI) X(JCOLI)=A(IRDWI,MAX)
INICH=0
N1=I-1
DO 22 I=1,NM1
IP1=I+1
DO 22 J=IP1,N
IF(JCR(J).GE.JCR(I)) GO TO 22
JTEMP=JCR(J)
JCR(J)=JCR(I)
JCR(I)=JTEMP
INICH=INICH+1
22 CONTINUE
IF(INICH/2*2.NE.INICH) DETER=-DETER
IF(INDICI.LE.0) GO TO 26
SIMUL=DETER
RETURN
24 DO 25 J=1,N
DO 27 I=1,N
IRDWI=IRDW(I)
JCOLI=JCOL(I)
27 Y(JCOLI)=A(IRDWI,J)
DO 28 I=1,N
28 A(I,J)=Y(I)
DO 30 I=1,N
DO 29 J=1,N
IRDWJ=IRDW(J)
JCOLJ=JCOL(J)
29 Y(IRDWJ)=A(I,JCOLJ)
DO 30 J=1,N
30 A(I,J)=Y(J)
SIMUL=DETER
RETURN
END

```

APÊNDICE E

Para a adimensionalização do sistema de equações (III-33) a (III-39), serão utilizados os seguintes parâmetros:

$$X = \frac{x}{H}, \quad \tau = \frac{\alpha t}{H^2}, \quad U = \frac{H}{\alpha} u$$

$$\theta(x, t) = \frac{T(x, t) - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} = \frac{T - T_{\min}}{\Delta T}$$

A substituição dos parâmetros apresentados acima, no sistema de equações (III-33) a (III-39), resulta:

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{\Delta T}{H^2} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= k \frac{\Delta T}{H^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - \rho C_p \frac{\alpha}{H} \frac{\Delta T U}{H} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \\ &- \frac{\Delta T \theta}{\frac{D}{4h} + \frac{D^2 \ln(De/D)}{8K'} + \frac{D^2}{4D_e h_\infty}} - \frac{(T_{\min} - T_\infty)}{\frac{D}{4h} + \frac{D^2 \ln(De/D)}{8K'} + \frac{D^2}{4D_e h_\infty}} \end{aligned} \quad E-1$$

Uma vez simplificada, a equação (E-1) torna-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - U \frac{\partial \theta}{\partial X} - \psi_0 \theta - \phi_0 \quad E-2$$

Sujeita às seguintes condições de contorno e inicial:

A) *Carga*

$$\theta(X, \tau) = 1, \quad X = X_0, \quad \tau > 0 \quad \text{E-3}$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \theta(X, \tau) = 0, \quad \tau > 0 \quad \text{E-4}$$

$$\theta(X, 0) = 0, \quad X \geq 0 \quad \text{E-5}$$

B) *Descarga*

$$\theta(X, \tau) = 0, \quad X = X_0, \quad \tau > 0 \quad \text{E-6}$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \theta(X, \tau) = 1, \quad \tau > 0 \quad \text{E-7}$$

$$\theta(X, 0) = 1, \quad X \geq 0 \quad \text{E-8}$$

sendo:

$$\Psi_0 = H^2 / (K D / (4h) + K D^2 \ln(De/D) / (8K') + K D^2 / (4D_e h_\infty))$$

$$\Phi_0 = \Psi_0 (T_{\min} - T_\infty) / (T_{\max} - T_{\min})$$

APÊNDICE F

A operação de carga é representada pelo sistema de equações (III-40) a (III-43), ou equações (F-1) a (F-4) abaixo, que será resolvido pelo método da Transformada de Laplace.

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + |U| \frac{\partial \theta}{\partial X} - \psi_0 \theta - \phi_0, \quad 0 \leq X \leq 1, \quad \tau > 0 \quad \text{F-1}$$

$$\theta(X, \tau) = 1, \quad X = X_0, \quad \tau > 0 \quad \text{F-2}$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \theta(X, \tau) = 0, \quad \tau > 0 \quad \text{F-3}$$

$$\theta(X, 0) = 0, \quad X \geq 0 \quad \text{F-4}$$

A geometria considerada no problema dado pelo sistema de equações dimensionais (III-33) a (III-36) ou sistema de equações adimensionais (F-1) a (F-4), é representada na figura (F-1).

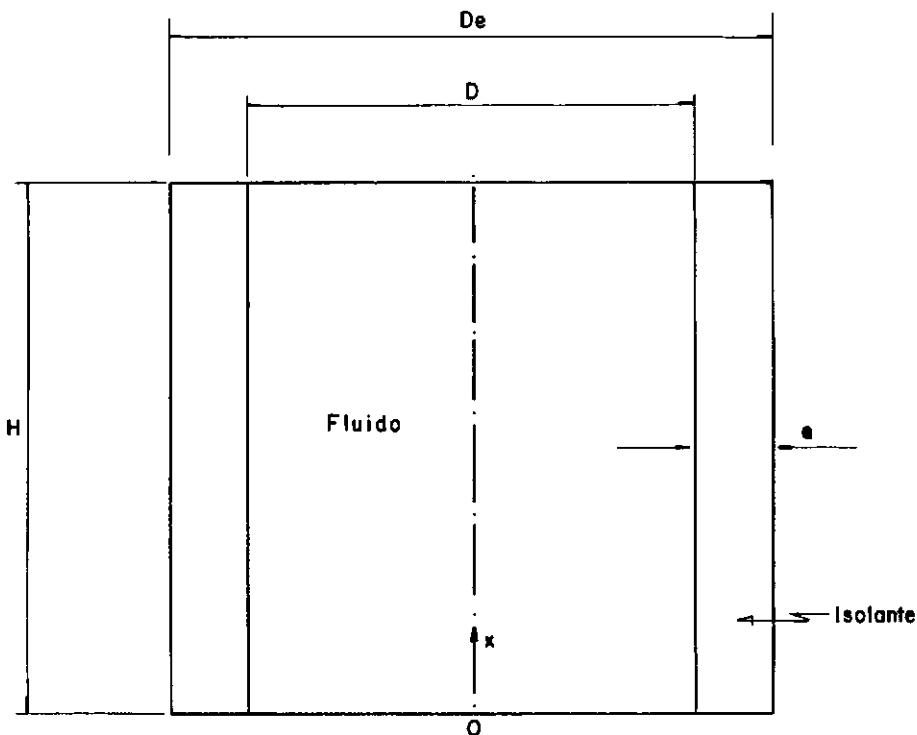


Figura (F-1) - Geometria do Problema

Fazendo-se uma mudança da variável dependente $\theta(X, \tau)$, Figueiredo¹², para:

$$\theta(X, \tau) = V(X, \tau) e^{\mu X + \lambda \tau} \quad \text{F-5}$$

Com μ e λ a serem determinados e, substituindo-se a nova variável na equação (F-5) e suas derivadas na equação (F-1), obtém-se:

$$v_{XX} e^{\mu X + \lambda \tau} + v e^{\mu X + \lambda \tau} (\mu^2 + |U| \mu - \lambda - \Psi_0) + v_X e^{\mu X + \lambda \tau} (2\mu + |U|) - v_\tau e^{\mu X + \lambda \tau} - \phi_0 = 0 \quad \text{F-6}$$

Pela escolha adequada de μ e λ , na equação (F-6):

$$\mu = -|U|/2 \quad \text{e} \quad \lambda = -\frac{U^2 + 4\Psi_0}{4}$$

A equação (F-1) fica reduzida a:

$$v_{XX} - v_\tau - \phi_0 e^{-\mu X - \lambda \tau} = 0 \quad \text{F-7}$$

Sujeita as seguintes condições de contorno e inicial:

$$v(X, \tau) = e^{-\mu X - \lambda \tau}, \quad X = X_0, \quad \tau > 0 \quad \text{F-8}$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} v(X, \tau) = 0, \quad \tau > 0 \quad \text{F-9}$$

$$v(X, 0) = 0, \quad X \geq 0 \quad \text{F-10}$$

A aplicação da Transformada de Laplace no sistema de equações (F-7) a (F-10), produz:

$$\mathfrak{L}(v_{XX}) - \mathfrak{L}(v_{\tau}) - \phi_0 e^{-\mu X} \mathfrak{L}(e^{-\lambda \tau}) = 0 \quad \text{F-11}$$

Ou seja:

$$\frac{d^2 S}{dX^2} - (p S - v(X, 0)) - \frac{\phi_0 e^{-\mu X}}{p + \lambda} = 0 \quad \text{F-12}$$

Pela condição inicial, equação (F-10), tem-se:

$$\frac{d^2 S}{dX^2} - p S = \frac{\phi_0 e^{-\mu X}}{p + \lambda} \quad \text{F-13}$$

Sujeita as condições de contorno:

$$S = \frac{e^{-\mu X}}{p + \lambda}, \quad X = X_0, \quad \tau > 0 \quad \text{F-14}$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} S = 0, \quad \tau > 0 \quad \text{F-15}$$

O sistema de equações (F-13) a (F-15), é constituído pela equação diferencial não homogênea (F-13), cuja solução, Kreyszig¹³, é apresentada a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Solução da equação geral } (S_G) &= \text{Solução da equação homogênea} \\ (S_h) &+ \text{Solução da equação particular } (S_p) \end{aligned} \quad \text{F-16}$$

Solução da Homogênea:

$$S_H = A e^{\sqrt{pX}} + B e^{-\sqrt{pX}} \quad F-17$$

Solução da Particular:

$$S_p = C e^{-\mu X} \quad F-18$$

Pela substituição da equação (F-18) e de suas derivadas na equação (F-13), tem-se:

$$C = \frac{\phi_o}{(p+\lambda)(\mu^2-p)}$$

Ou

$$S_p = \frac{\phi_o}{(p+\lambda)(\mu^2-p)} e^{-\mu X} \quad F-19$$

Com as equações (F-17) e (F-18), substituídas em (F-16), obtem-se:

$$S_G = A e^{\sqrt{pX}} + B e^{-\sqrt{pX}} + \frac{\phi_o e^{-\mu X}}{(p+\lambda)(\mu^2-p)} \quad F-20$$

As constantes A e B, são determinadas a partir das condições de contorno, equações (F-14) e (F-15).

Para que seja satisfeita a equação (F-15):

$$B = 0$$

Substituindo-se o valor de B e a equação (F-14) em (F-20), calcula-se:

$$A = \frac{e^{(-\mu X_0 - \sqrt{p} X_0)}}{p + \lambda} + \frac{\phi_0 e^{(-\sqrt{p} X_0 - \mu X_0)}}{(p + \lambda)(p - \mu^2)}$$

Com os valores de A e B, substituídos na equação (F-20), a solução geral do sistema de equações (F-13) a (F-15), se torna:

$$S_G = \frac{e^{\left(-\frac{|U|}{2} X_0\right) - (X_0 - X)\sqrt{p}}}{p - \frac{U^2 + 4\Psi_0}{4}} + \frac{\phi_0 e^{\left(-\frac{|U|}{2} X_0\right) - (X_0 - X)\sqrt{p}}}{\left(p - \frac{U^2 + 4\Psi_0}{4}\right)\left(p - \frac{U^2}{4}\right)} - \frac{\phi_0 e^{\frac{|U|}{2} X}}{\left(p - \frac{U^2 + 4\Psi_0}{4}\right)\left(p - \frac{U^2}{4}\right)} \quad \text{F-21}$$

Aplicando-se a Transformada Inversa em cada termo da equação (F-21), tem-se:

1. Por definição

$$\mathcal{F}^{-1}(S_G) = v(X, \tau)$$

2. Da tabela de Transformada Inversa, Carlaw¹⁴:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{\frac{|U|}{2} X_0 - (X_0 - X)\sqrt{p}}}{\left(p - \frac{U^2 + 4\Psi_0}{4}\right)}\right) = \exp(C_2 X_0) (0,5 \exp(C_1^2 \tau)) (\exp((X - X_0) C_1))$$

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{X_o - X}{2\sqrt{\tau}} - C_1\sqrt{\tau}\right) + \exp((X_o - X)C_1)\operatorname{erfc}\left(\frac{X_o - X}{2\sqrt{\tau}} + C_1\sqrt{\tau}\right))$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\phi_o e^{\frac{|U|X_o}{2} + (X-X_o)\sqrt{P}}}{\left(p - \frac{U^2 + 4\Psi_o}{4}\right)\left(p - \frac{U^2}{4}\right)}\right) = \phi_o \exp(C_2 X_o) \left(\frac{1}{2} \exp(C_1^2 \tau)\right)$$

$$\left(\frac{\exp((X-X_o)C_1)}{C_1 - C_2^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{X_o - X}{2\sqrt{\tau}} - C_1\sqrt{\tau}\right) + \frac{\exp(X_o - X)C_1}{-C_2^2 - C_1}\right)$$

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{X_o - X}{2\sqrt{\tau}} + C_1\sqrt{\tau}\right) + \frac{\phi_o U^2 \exp((X_o - X)C_4 + C_5 \tau)}{4\left(\frac{U^4}{16} - \frac{U^2 + 4\Psi_o}{4}\right)}$$

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{X_o - X}{2\sqrt{\tau}} - C_2^2\sqrt{\tau}\right)$$

3. Da tabela de Transformada Inversa, Kreyszig¹³:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\phi_o e^{-\frac{|U|X}{2}}}{\left(p - \frac{U^2 + 4\Psi_o}{4}\right)\left(p - \frac{U^2}{4}\right)}\right) = \frac{\phi_o \exp(-C_2 X)}{-\Psi_o} \exp(C_1^2 \tau - C_2^2 \tau)$$

Substituindo-se, a variável $v(X, \tau)$ na equação (F-5), obtem-se a solução do sistema de equações (F-1) a (F-4), como:

$$\begin{aligned} \theta(X, \tau) = & 0,5 \left(\exp((X-X_o)(C_1-C_2)) \operatorname{erfc}\left(\frac{(X_o-X)}{(2\sqrt{\tau})} - \right. \right. \\ & \left. \left. - C_1\sqrt{\tau}\right) + \exp((X_o-X)(C_1+C_2)) \operatorname{erfc}\left(\frac{(X_o-X)}{(2\sqrt{\tau})} + \right. \right. \\ & \left. \left. C_1\sqrt{\tau}\right) \right) - \phi_o \left(1 - \exp(-\Psi_o \tau) \right) / (\Psi_o + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \phi_o/2 \left(\exp((X_o - X)(C_2 - C_1)/(C_1 - (C_2)^2)) \right. \\
& \operatorname{erfc}((X_o - X)/(2\sqrt{\tau}) - C_1\sqrt{\tau}) - \exp((X_o - X) \\
& (C_2 + C_1)/(C_1 + (C_2)^2)) \operatorname{erfc}((X_o - X)/(2\sqrt{\tau}) + \\
& \left. + C_1\sqrt{\tau}) \right) + C_3 \exp((X_o - X)C_4 + C_5\tau) \operatorname{erfc} \\
& ((X_o - X)/(2\sqrt{\tau}) - (C_2)^2\sqrt{\tau})
\end{aligned}$$

Onde:

$$C_1 = \sqrt{(U^2 + 4\Psi_o)/4}$$

$$C_2 = |U|/2$$

$$C_3 = 4\phi_o U^2 / (U^4 - 4U^2 - 16\Psi_o)$$

$$C_4 = |U|/2 - U^2/4$$

$$C_5 = U^4/16 - (U^2 + 4\Psi_o)/4$$

APÊNDICE G

A operação de descarga é representada pelo sistema de equações (III-40) e (III-44) a (III-46) ou equações (G-1) a (G-4) abaixo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - |U| \frac{\partial \theta}{\partial X} - \psi_0 \theta - \phi_0 ,$$

$$0 \leq X \leq 1 , \quad \tau > 0 \quad \text{G-1}$$

$$\theta(X, \tau) = 0 , \quad X = X_0 , \quad \tau > 0 \quad \text{G-2}$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \theta(X, \tau) = 1 , \quad \tau > 0 \quad \text{G-3}$$

$$\theta(X, 0) = 1 , \quad X \geq 0 \quad \text{G-4}$$

A geometria considerada no problema dado pelo sistema de equações dimensionais (III-33) e (III-37) a (III-39) ou sistema de equações adimensionais (G-1) a (G-4) é representada na figura (F-1), (Apêndice F).

A solução do sistema acima, será obtida seguindo-se a mesma sequência de desenvolvimento e dos métodos aplicados na solução do sistema de equações (III-40) e (III-43), que representa a operação da carga (Apêndice F), ou seja:

Mudança da variável $\theta(X, \tau)$, Figueiredo¹², para:

$$\theta(X, \tau) = v(X, \tau) e^{\mu X + \lambda \tau} \quad \text{G-5}$$

Com uma escolha adequada de μ e λ :

$$\mu = |\dot{U}|/2 \quad \text{e} \quad \lambda = -\frac{U^2 + 4\Psi_0}{4}$$

E substituindo-se a nova variável, obtem-se a equação:

$$v_{XX} - v_{\tau} - \phi_0 e^{-\mu X - \lambda \tau} = 0 \quad \text{G-6}$$

Sujeita às condições de contorno e inicial:

$$v(X, \tau) = 0, \quad X = X_0, \quad \tau > 0 \quad \text{G-7}$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} v(X, \tau) = 0, \quad \tau > 0 \quad \text{G-8}$$

$$v(X, 0) = e^{-\mu X}, \quad X \geq 0 \quad \text{G-9}$$

Aplicando-se o método da Transformada de Laplace ao sistema de equações (G-6) a (G-9), obtem-se:

$$\frac{d^2 S}{dx^2} - (p S + v(X, 0)) - \frac{\phi_0 e^{-\mu X}}{p + \lambda} = 0 \quad \text{G-10}$$

Pela condição inicial equação (G-9), tem-se:

$$\frac{d^2 S}{dx^2} - p S = \frac{\phi_0 e^{-\mu X}}{p + \lambda} - e^{-\mu X} \quad \text{G-11}$$

Sujeita às condições de contorno:

$$S = 0, \quad X = X_0 \quad \text{G-12}$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} S = 0, \quad X \geq 0 \quad \text{G-13}$$

Solução do sistema de equações (G-11) a (G-13):

Solução da equação geral (S_G) = Solução da equação homogênea (S_h) + Solução da equação particular (S_p) G-14

Solução da Homogênea:

$$S_H = A e^{\sqrt{pX}} + B e^{-\sqrt{pX}} \quad \text{G-15}$$

Solução da Particular:

$$S_p = C e^{-\mu X} \quad \text{G-16}$$

Substituindo-se a equação (G-16) e suas derivadas na equação (G-11) obtem-se:

$$C = - \frac{\phi_o}{(p+\lambda)(p-\mu^2)} + \frac{1}{p+\mu^2}$$

Ou:

$$S_p = \left(- \frac{\phi_o}{(p+\lambda)(p-\mu^2)} + \frac{1}{p+\mu^2} \right) e^{-\mu X} \quad \text{G-17}$$

A substituição das equações (G-15) e (G-17) em (G-14) resulta:

$$S_G = A e^{\sqrt{pX}} + B e^{-\sqrt{pX}} - \frac{\phi_o e^{-\mu X}}{(p+\lambda)(p-\mu^2)} + \frac{e^{-\mu X}}{p-\mu^2} \quad \text{G-18}$$

As constantes A e B são obtidas a partir das equações (G-12) e (G-13).

Para que seja satisfeita a equação (G-13):

$$A = 0$$

Pela substituição da equação (G-12) em (G-18),
obtem-se:

$$B = - \frac{e^{(-\mu X_0 + \sqrt{p} X_0)}}{p - \mu^2} + \frac{\phi_0 e^{(-\sqrt{X_0} + \sqrt{p} X_0)}}{(p + \lambda)(p - \mu^2)}$$

Substituindo-se os valores de A e B na equação (G-18), a solução geral torna-se:

$$S_G = - \frac{e^{(-\mu X_0 - (X - X_0)\sqrt{p})}}{p - \mu^2} + \frac{\phi_0 e^{(-\mu X_0 - (X - X_0)\sqrt{p})}}{(p + \lambda)(p - \mu^2)} -$$

$$- \frac{\phi_0 e^{-\mu X}}{(p + \lambda)(p - \mu^2)} + \frac{e^{-\mu X}}{p - \mu^2} \quad G-19$$

Onde:

$$\lambda = - \frac{U^2 + 4\Psi_0}{4} \quad e \quad \mu = \frac{|U|}{2}$$

Aplicando-se a Transformada Inversa de Laplace, a partir das tabelas apresentadas por Carslaw¹⁴ e Kreyszig¹³, aos membros da equação (G-19) e substituindo-se o resultado na equação (G-5), obtem-se finalmente:

$$\theta(X, \tau) = - 0,5 \left(\exp(-\Psi_0 \tau) \operatorname{erfc} \left(\frac{(X - X_0)}{(2\sqrt{\tau})} - C_2 \sqrt{\tau} \right) + \exp \left(\frac{(X - X_0)}{(2\sqrt{\tau})} + C_2 \sqrt{\tau} \right) \right) + \exp(-\Psi_0 \tau) + 2\phi_0 / (U^2 + 2\Psi_0) -$$

$$- (\exp(-C_6 \tau) - \exp(-\Psi_0 \tau)) + \phi_0 / 2 \left(\exp \left(\frac{(X - X_0)}{(C_1 - (C_2)^2)} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{(X - X_0)}{(C_1 - (C_2)^2)} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& (2\sqrt{\tau}) - C_1\sqrt{\tau}) - \exp((X-X_0)(C_2+C_1))/((C_1+ \\
& + (C_2)^2) \operatorname{erfc}((X-X_0)/(2\sqrt{\tau}) + C_1\sqrt{\tau})) + \\
& + C_7 \phi_0 \exp((X-X_0)C_4 + C_8\tau) \operatorname{erfc}((X-X_0)/ \\
& (2\sqrt{\tau}) - (C_2)^2\sqrt{\tau})
\end{aligned}$$

Onde :

$$C_1 = \sqrt{U^2 + 4\Psi_0}/4$$

$$C_2 = |U|/2$$

$$C_4 = |U|/2 - U^2/4$$

$$C_6 = (U^2 + 4\Psi_0)/2$$

$$C_7 = 4U^2/(-3U^2 - \Psi_0)$$

$$C_8 = -3U^2/16 + \Psi_0$$

APÊNDICE H

Deseja-se provar que:

$$\varepsilon_{\text{estratificado}} > \varepsilon_{\text{homogêneo}}$$

H-1

$$\frac{\int_0^H ((T(x,t) - T_{\min}) - T_0 \ln(T(x,t)/T_{\min})) dx}{H((T_{\max} - T_{\min}) - T_0 \ln(T_{\max}/T_{\min}))} >$$

$$\frac{\frac{1}{H} \int_0^H T(x,t) dx - T_{\min} - T_0 \ln(\frac{1}{H} \int_0^H T(x,t) dx / T_{\min})}{T_{\max} - T_{\min} - T_0 \ln(T_{\max}/T_{\min})}$$

Simplificando resulta:

$$\frac{1}{H} \int_0^H \ln T(x,t) dx < \ln \frac{1}{H} \int_0^H T(x,t) dx$$

H-2

Em termos de Somatórios:

$$\frac{1}{\sum \Delta x_i} \sum (\ln T_i(t)) \Delta x_i < \ln \frac{1}{\sum \Delta x_i} \sum T_i(t) \Delta x_i$$

Ou:

$$\frac{1}{\sum \Delta x_i} \sum \ln(T_i(t))^{\Delta x_i} < \ln \frac{1}{\sum \Delta x_i} \sum T_i(t) \Delta x_i$$

$$\frac{1}{\sum \Delta x_i} \ln \prod (T_i(t))^{\Delta x_i} < \ln \frac{1}{\sum \Delta x_i} \sum T_i(t) \Delta x_i$$

E também:

$$\ln \left(\prod_{i=1}^n T_i(t)^{\Delta x_i} \right)^{\frac{1}{\sum \Delta x_i}} < \ln \frac{1}{\sum \Delta x_i} \sum T_i(t) \Delta x_i$$

Ou seja:

$$\prod_{i=1}^n \left(T_i(t)^{\Delta x_i} \right)^{\frac{1}{\sum \Delta x_i}} < \frac{1}{\sum \Delta x_i} \sum T_i(t) \Delta x_i \quad \text{H-3}$$

Admitindo-se $\Delta x_i = \text{constante} = \Delta x$:

$$\left(\prod_{i=1}^n T_i(t) \right)^{\frac{\Delta x}{\sum \Delta x}} < \frac{\Delta x}{\sum \Delta x} \sum T_i(t)$$

Ou:

$$\left(\prod_{i=1}^n T_i(t) \right)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i(t) \quad \text{H-4}$$

Onde:

H : Altura do reservatório.

n : Número de intervalos, distribuídos ao longo da altura do tanque.

Δx : Espaçamento entre os pontos.

$\left(\prod_{i=1}^n T_i(t) \right)^{\frac{1}{n}}$: Média geométrica das temperaturas.

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i(t)$: Média aritmética das temperaturas.

Portanto, deve-se provar que a média geométrica é sempre menor do que a média aritmética para qualquer $n > 0$.

A inequação (H-4), foi verificada por KOROVKIN¹⁵, pelo método da Indução Finita. Tentar-se-á uma demonstração alternativa por Máximos e Mínimos, a seguir:

Dividindo-se ambos os membros da inequação (H-4) pela expressão $\Sigma T_j(t)$, $j = 1, 2, 3, \dots, M$:

$$\frac{1}{\Sigma T_j(t)} (\prod T_i(t))^{1/n} < \frac{1}{n \Sigma T_j(t)} \Sigma T_i(t)$$

E definindo-se:

$$\frac{T_i(t)}{\Sigma T_j(t)} = y_i(t)$$

Obtem-se:

$$(\prod_{i=1}^n y_i(t))^{1/n} < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i(t)$$

Mas:

$$\sum_{i=1}^n y_i(t) = 1 \quad \text{H-5}$$

Portanto, deve ser demonstrado que:

$$(\prod_{i=1}^n y_i(t))^{1/n} < \frac{1}{n} \quad \text{H-6}$$

Seja achar o extremo da função:

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = \left(\prod_{i=1}^n y_i(t) \right)^{1/n} \quad H-7$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n y_i(t) = 1$$

Considere-se:

$$y_n(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i(t) \quad H-8$$

Substituindo-se na equação (H-7):

$$G(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} y_i(t) \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i(t) \right) \right)^{1/n}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_i(t)} &= \left(\prod_{j \neq i} y_j(t) \right) \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i(t) \right) + \\ &+ \left(\prod_{i=1}^{n-1} y_i(t) \right) (-1) = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1) \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\left(\prod_{j \neq i} y_j(t) \right) \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i(t) \right) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} y_i(t) \right)$$

Donde obtem-se que:

$$1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i(t) = y_i(t), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1)$$

Logo, pela relação (H-8):

$$y_n(t) = y_i(t) \quad , \quad \forall i$$

Ou seja:

$$y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_n$$

E também, por (H-5):

$$y_i = \frac{1}{n} \quad , \quad \forall i$$

Substituindo-se y_i na equação (H-7):

$$\left(\prod_{i=1}^n y_i(t) \right)^{1/n} = \frac{1}{n} \quad .$$

Admitindo-se que o extremo determinado é um máximo, conclui-se que a média geométrica só será igual a média aritmética quando todos os $T_i(t)$ forem iguais, Em qualquer outro caso, a média geométrica será sempre menor.

Supondo-se que $F(y_1, y_2, \dots, y_n)$ não possua pontos de sela, pode-se demonstrar que o extremo é um máximo., na forma que se segue.

Seja:

$$y_i = \frac{1}{n\alpha} \quad , \quad (\alpha > 0 \text{ e } \alpha \neq 1)$$

E também que:

$$y_j = \frac{1}{n} \quad , \quad j = 3, 4, \dots, n$$

Para determinar o valor de y_2 :

$$\sum y_i(t) = \frac{1}{n\alpha} + y_2 + \sum_{i=3}^n \frac{1}{n} = 1$$

Donde:

$$y_2 = 1 - \frac{1}{n\alpha} - \frac{n-2}{n} = \frac{2\alpha-1}{n\alpha}$$

Substituindo-se os y_i assim determinados na inequação (H-6):

$$\left(\frac{1}{n\alpha} \frac{2\alpha-1}{n\alpha} \frac{n}{3} \frac{1}{n} \right)^{1/n} < \frac{1}{n}$$

Ou seja:

$$\frac{2\alpha-1}{\alpha^2 n} < \frac{1}{n^n}$$

E então:

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 > 0$$

Ou:

$$(\alpha - 1)^2 > 0, \quad (\alpha > 0 \quad \text{e} \quad \alpha \neq 1)$$

Fica portanto demonstrado que, se nem todos os $y_i(t)$ são iguais:

$$(\prod y_i(t))^{1/n} < \frac{1}{n}$$

E, se não houver pontos de sela, o extremo é um máximo.

Por outro lado, quando n cresce indefinidamente, a inequação (H-4) torna-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\prod T_i(t))^{1/n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum T_i(t)$$

Ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln (\prod T_i(t)) < \ln \frac{1}{H} \int_0^H T(x,t) dx$$

E ainda:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum \ln T_i(t) = \frac{1}{H} \int_0^H \ln T(x,t) dx < \ln \frac{1}{H} \int_0^H T(x,t) dx$$

Que é a inequação (H-2) que se queria demonstrada.

NOMENCLATURA

- A - Área da seção reta do tanque
- B = H/D
- B' - Trabalho disponível
- C_p, C'_p - Calor específico do fluido e do isolante a pressão constante respectivamente
- D, D_e - Diâmetro interno e externo do reservatório respectivamente
- E - Energia térmica conservada
- Gr - Número de Grashof
- g - Aceleração gravitacional
- H - Altura do reservatório
- h, h_∞ - Coeficiente de transferência de calor entre a parede e o fluido no interior do reservatório e entre a parede e o meio ambiente, respectivamente
- i - Índice de localização do ponto no reservatório
- K, K' - Condutividade térmica do fluido e do isolante, respectivamente
- K_{eq} - condutividade térmica equivalente
- M - Número do intervalo de tempo discreto considerado
- M' - Massa do fluido no interior do tanque
- \dot{m} - Fluxo de massa
- Nu - Número de Nusselt, devido a convecção interna

Nu_{eq}	- Número de Nusselt equivalente
N_p	- Número de pontos do reservatório
Pr	- Número de Prandtl
Re	- Número de Reynolds
S	- Entropia do fluido no interior do reservatório
s	- entropia específica do fluido no interior do reservatório
T	- temperatura dimensional do fluido
T'	- temperatura dimensional do isolante
T_∞	- temperatura do meio ambiente
ΔT	- diferença inicial das temperaturas do fluido no topo e no fundo do reservatório
t	- tempo dimensional
U'	- energia interna do fluido no interior do reservatório
u'	- energia interna específica do fluido no interior do reservatório
u	- velocidade dimensional
U	- velocidade adimensional
x	- coordenada dimensional
X	- coordenada adimensional
W	- K/K'
α, α'	- difusividade térmica do fluido e da parede, respectivamente
β	- coeficiente volumétrico de expansão térmica

- τ - tempo adimensional
- θ, θ' - temperaturas adimensionais do fluido e do isolante, respectivamente
- ν - viscosidade cinemática
- μ - viscosidade dinâmica
- ρ, ρ' - massa específica do fluido e do material isolante, respectivamente
- η - eficiência térmica pela Primeira Lei da Termodinâmica
- ϵ - eficiência térmica pela Segunda Lei da Termodinâmica
- o - sub-índice relativo às condições iniciais.

BIBLIOGRAFIA

- | ¹ | KOEFOED, J.: Thermal energy and its storage. *Energy*, New York, v. 2: 55-58, 1977.
- | ² | DUMOND, R.: *Energie solaire et storage d'energie*. Paris, Masson, 1977.
- | ³ | GROSS, R. J.: "Thermocline thermal energy storage". In: *Proceedings of the Lincfocus Solar Thermal Energy Technology Development: a seminar for industry*. Albuquerque, New Mexico, Sep. 9 to 11, 1980. p 205-212.
- | ⁴ | CABELLI, A.: Storage tanks: a numerical experiment. *Solar Energy*, New York, v. 19: 45-54, 1977.
- | ⁵ | LAVAN, Z. & THOMPSON, J.: Experimental study of thermally stratified hot water storage tanks. *Solar Energy*, New York, v. 19: 519-524, 1977.
- | ⁶ | CNRS.: *Essais de la Centrale Electrosolaire de 1MW_{th}*. s.L , s.ed , s.d . França, 1977.
- | ⁷ | BLAY, D.: "Behaviour of a stratified sensible heat storage during relaxation phases". In: *Proceedings of the Solar World Forum*. Brington, UK, Aug. 23 to 28, 1980. p. 312.
- | ⁸ | CARNAHAN, B.; LUTHER, H. A.; WILKES, J. O.: *Applied Numerical methods*. New York, John Wiley, 1969. 604 p.

- | ⁹ | JONES, G. F. & LIOR, N.: Optimal insulation of solar heating systems pipes and tanks. *Energy*, New York, v. 4: 593-621, 1979.
- | ¹⁰ | KREITH, F.: *Princípios de transmissão de calor*. 3. ed. São Paulo, Edgard Blücher, 1977. 550 p.
- | ¹¹ | SCHLICHTING, H.: *Boundary layer theory*. 7. ed. New York, McGraw-Hill, 1979. 817 p.
- | ¹² | FIGUEIREDO, D. G.: *Análise de Fourier e equações diferenciais*. Rio de Janeiro, IMPA; CNPq, 1977. (Projeto Euclides). 274 p.
- | ¹³ | KREYSZIG, E.: *Matemática superior*. Rio de Janeiro, LTC, 1977. 4 v.
- | ¹⁴ | CARSLAW, H. S. & JAEGER, J. C.: *Conduction of heat in solids*. 2. ed. Oxford, Oxford University Press, 1959. 510 p.
- | ¹⁵ | KOROVKIN, P. P.: *Inequalities*. Moscow, Mir, 1975. (Little Mathematics Library) p. 12-16.
- | ¹⁶ | WELTY, J. R.: *Engineering heat transfer*, Wiley Int. Ed. NY 1974.
- | ¹⁷ | FABRY, C.: *Eléments de thermodynamique*. 11 ed. rev., Paris, Armand Colin, 1962. (Collection Armand Colin, Section Physique).
- | ¹⁸ | SMITH, G. D.: *Numerical solution of partial differential equations*. London, Oxford, University Press, 1965. (Oxford Mathematical Handbook).

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- AHERN, J. E.: *The exergy method of energy systems analysis*. New York, John Willey, 1980. 295 p.
- SIEGEL, R. & HOWELL, J. R.: *Thermal radiation heat transfer*. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1972. (International Student Edition). 814 p.
- BASTOS, L. E. G.: *Conversão termodinâmica da energia solar*. Relatório de estágio, Toulouse, França, LAAS/CNRS, 15/09/77 a 01/03/78.
- PACITTI, T.: *Fortran-monitor princípios*. Rio de Janeiro. LTC, 1977.
- BATCHELOR, G. K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, [c1967]. 615 p.
- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N.: *Transport phenomena*. New York, John Wiley, 1960. 780 p.
- BOYCE, W. E. & DIPRIMA, R. C.: *Elementary differential equations and boundary value problems*. 3 ed. New York, John Willey, 1977. 582 p.
- CALLEN, H. B.: *Thermodynamics*. New York, John Willey, 1960. 376 p.
- TURNER, R. H. & BONNIN, J.: *Accumulation d'énergie thermique à haute température*. Paris, Editions SCM, 1979. (Collection Énergie Solaire).

- FRANCE. DIRECTION DE LA MÉTÉOROLOGIE NATIONALE. *Mémorial de la Météorologie Nationale*. Anot. par M. Garnier. 7. ed. Paris, |s.ed.|, 1967. p. 55-148.